

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA FINANCÍ

Modelování a predikce volatility vybraných akciových indexů v kontextu globální finanční  
krize

Modeling and Forecasting the Volatility of Selected Stock Indexes in the Context of the  
Global Financial Crisis

Student: Bc. Martin Soukup

Vedoucí diplomové práce: Ing. Petr Sed'a, Ph.D.

OSTRAVA 2013

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Ekonomická fakulta  
Katedra financí

## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Martin Soukup**  
Studijní program: **N6202 Hospodářská politika a správa**  
Studijní obor: **6202T010 Finance**  
Specializace: **00 Finance**  
Téma: **Modelování a predikce volatility vybraných akciových indexů v  
kontextu globální finanční krize**  
**Modeling and Forecasting the Volatility of Selected Stock Indexes in the  
Context of the Global Financial Crisis**

Zásady při vypracování:

1. Úvod
2. Charakteristika finančních trhů a vlastnosti finančních časových řad
3. Základní přístupy k modelování a predikci volatility
4. Empirická odhady modelů volatility a její predikce
5. Shrnutí výsledků
6. Závěr

Seznam použité literatury

Seznam zkratk

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce

Seznam příloh

Přílohy

Seznam doporučené odborné literatury:

ARL.T, Josef a Markéta ARLTOVÁ. *Finanční časové řady*, 1. vyd. Praha: Grada, 2003. 220 s. ISBN 80-247-0330-0.

CAMPBELL, J., A. LO a C. MACKINLAY. *The Econometrics of Financial Markets*, 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 1997. 632 p. ISBN 0-691-04301-9.

CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*, 1. vyd. Praha: Ekopress, 2003. 230 s. ISBN 978-80-8602-943-9.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Petr Sed'a, Ph.D.**

Datum zadání: 23.11.2012

Datum odevzdání: 26.04.2013



Ing. Iveta Ratmanová, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Dr. Ing. Dana Dluhošová  
děkanka fakulty

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem celou práci, včetně všech příloh, vypracoval samostatně. Přílohu č. 1, danou mi k dispozici, jsem samostatně doplnil.

V Ostravě dne 8. 7. 2013



.....  
Bc. Martin Soukup

**Poděkování**

Rád bych na tomto místě poděkoval panu Ing. Petru Sed'ovi, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, odbornou pomoc a především jeho ochotu a vstřícný přístup.

## Obsah

1	Úvod.....	9
2	Charakteristika finančních trhů a vlastnosti finančních časových řad .....	12
2.1	Charakteristika finančních trhů .....	12
2.1.1	Kapitálový trh.....	13
2.1.2	Akciový index .....	14
2.1.3	Finanční krize.....	15
2.2	Vlastnosti finančních časových řad .....	17
2.2.1	Leptokurtické rozdělení.....	17
2.2.2	Shlukování volatility .....	17
2.2.3	Pákový efekt.....	18
2.3	Předpoklady finančních časových řad .....	19
2.3.1	Normalita.....	19
2.3.2	Linearita .....	20
2.3.3	Stacionarita.....	21
2.4	Vliv mikrostruktury trhu.....	22
3	Základní přístupy k modelování a predikci volatility .....	24
3.1	Volatilita .....	24
3.2	Lineární modely.....	26
3.2.1	Model ARCH .....	26
3.2.2	Model GARCH .....	27
3.3	Nelineární modely .....	29
3.3.1	Model EGARCH .....	29
3.3.2	Model CGARCH.....	30
3.4	Konstrukce modelů volatility .....	31
3.4.1	Testování podmíněné heteroskedasticity v časových řadách .....	31
3.4.2	Odhad parametrů .....	33

3.4.3	Konstrukce předpovědí na základě odhadnutých modelů .....	35
3.4.4	Diagnostická kontrola .....	35
3.5	Ztrátové funkce .....	37
4	Empirické odhady modelů volatility a její predikce .....	39
4.1	Základní charakteristika a vývoj vybraných akciových indexů .....	39
4.1.1	NASDAQ Composite .....	39
4.1.2	Nikkei 225 .....	40
4.2	Volba dat a jejich statistická analýza .....	41
4.2.1	Rozdělení testovacích období .....	41
4.2.2	Definice výnosu .....	42
4.2.3	Deskriptivní statistika a test normality .....	44
4.2.4	Test stacionarity výnosů .....	47
4.2.5	Test heteroskedasticity výnosů .....	47
4.3	Odhad lineárních a nelineárních modelů volatility .....	48
4.3.1	USA .....	49
4.3.2	Japonsko .....	50
4.4	Testování reziduí odhadnutých modelů .....	52
4.4.1	Test normality .....	52
4.4.2	Test autokorelace .....	54
4.4.3	Test heteroskedasticity .....	56
4.5	Grafické vyjádření volatility .....	58
4.6	Grafické srovnání odhadovaného a skutečného podmíněného rozptylu .....	61
4.7	Hodnocení predikčních schopností ex-post jednotlivých modelů .....	66
5	Shrnutí výsledků .....	68
6	Závěr .....	71
	Seznam použité literatury .....	74
	Seznam zkratk .....	77

Prohlášení o využití výsledků diplomové práce .....	78
Seznam Příloh .....	79
Přílohy .....	80



# 1 Úvod

Finanční trh je nedílnou součástí tržního systému a umožňuje alokaci finančních zdrojů. Soustřeďuje se zde nabídka a poptávka peněz a kapitálu. Na jedné straně stojí subjekty nabízející své úspory a na straně druhé subjekty, které tyto volné finanční zdroje potřebují na financování svých aktivit. V posledních letech jsou finanční trhy globalizovány, což je následkem jak liberalizace světového obchodu a devizových režimů, tak širokého spektra inovací ve finančnictví, které umožňují výrazné snižování nákladů a zvyšují efektivnost finančních trhů. V důsledku je pak pro investora možné téměř okamžitě koupit aktivum za jedinou cenu, která není ovlivněna geografickou polohou, což lze považovat za výhodu. Hlavní nevýhoda globalizace se projevila v rozmezí let 2008-2009 po splasknutí hypoteční bubliny ve Spojených státech amerických. Díky provázanosti světových ekonomik se krize rozšířila do celého světa a negativní dopady do reálné ekonomiky trvají dodnes.

Součástí finančního trhu je trh kapitálový. Přestože v současnosti může být v jednotlivých zemích napříč světem jeho struktura nebo institucionální uspořádání stejné či velmi podobné, platí, že západní trhy (USA, západní Evropa) jsou rozvinutější, než je tomu v případě východních trhů. To je následkem politické situace 20. století, kdy fungovaly země střední a východní Evropy v režimu centrálně plánovaných ekonomik, a jakýkoliv svobodný trh tak nemohl existovat, natož procházet vývojem.

Významnou částí kapitálového trhu je akciový trh, který je ovlivňován mnoha faktory s lineárními i nelineárními vztahy, jež se staly hlavním předmětem zkoumání finančních analytiků. Cílem jejich práce je vypořádání jistých pravidel a souvislostí v chování akciových kurzů a jejich následné zformování do podoby modelů, které mají pomáhat v rozhodování investorům. Pakliže je předpověď budoucího vývoje provedena správně, investor realizuje zisk. Na druhou stranu ale logicky existuje riziko nesprávné předpovědi, chybného rozhodnutí a ztráty, neboť ceny aktiv nejsou stálé a kolísají.

Tato nestálost se nazývá volatilita a vyjadřuje kolísání výnosových měr, měnových kurzů nebo cen investičních instrumentů. Platí, že čím vyšší je volatilita cenného papíru, tím větší je riziko, ale zároveň i výnos. Záleží na každém investorovi, na jakou míru rizika přistoupí. Volatilita je tak významným prvkem, který ovlivňuje rozhodování investorů.

Hlavním cílem této diplomové práce je modelování a predikce volatility ex-post vybraných akciových indexů amerického a japonského trhu v období od 1. 1. 2004 do 8. 3. 2012. Z hlavního cíle vycházejí tři dílčí cíle:

- a) posouzení vhodnosti použití navržených modelů volatility,
- b) hodnocení stability výsledků ve stanovených obdobích,
- c) hodnocení predikčních schopností ex-post jednotlivých modelů.

Předkládaná diplomová práce „Modelování a predikce volatility vybraných akciových indexů v kontextu globální finanční krize“ je tvořena úvodem, dvěma teoretickými kapitolami, které obsahují potřebnou metodologii, dvěma praktickými kapitolami, kde je aplikována metodologie na konkrétní časové řady, závěrem a přílohou.

#### *Kapitola 2 – Charakteristika finančních trhů a vlastnosti finančních časových řad*

V této kapitole jsou charakterizovány finanční trhy, popsány charakteristické vlastnosti a předpoklady finančních časových řad. Na závěr je vysvětlen vliv mikrostruktury trhu.

#### *Kapitola 3 – Základní přístupy k modelování a predikci volatility*

Na začátku kapitoly je definován pojem volatilita, uvedeny způsoby jejího výpočtu a predikce. Uveden je rovněž význam volatility ve financích a oblasti, ve kterých se využívá. Jsou popsány vybrané lineární i nelineární modely volatility. Další obsáhlá podkapitola je věnována konstrukci modelů volatility, popsáno je zde testování podmíněné heteroskedasticity, odhad parametrů a konstrukce předpovědí na základě odhadnutých modelů. Na závěr jsou popsány ztrátové funkce.

#### *Kapitola 4 – Empirické odhady modelů volatility a její predikce*

Tato aplikačně-empirická kapitola tvoří hlavní část diplomové práce. Nejprve jsou charakterizovány vybrané indexy, jejichž časové řady jsou rozděleny do různě dlouhých tří testovacích období a poté statisticky analyzovány. Pro každou časovou řadu u obou indexů je odhadnut nejlepší lineární a nejlepší nelineární model volatility, jejichž rezidua jsou následně otestována. Vývoj podmíněného rozptylu, jímž je volatilita vyjádřena, je pak pro každý model graficky zachycen a nejvýraznější výkyvy okomentovány. Na závěr je graficky srovnán skutečný a podle jednotlivých modelů odhadnutý podmíněný rozptyl, provedena predikce ex-post vybraných akciových indexů a posouzena její kvalita.

Výpočty v této diplomové práci byly prováděny v programu EViews a MS Excel.

#### *Kapitola 5 – Shrnutí výsledků*

V této kapitole jsou shrnuty výsledky čtvrté kapitoly.

## 2 Charakteristika finančních trhů a vlastnosti finančních časových řad

V následující kapitole budou charakterizovány finanční trhy, vymezen trh kapitálový, popsána funkce a konstrukce akciového indexu a také definován a kategorizován pojem finanční krize a popsána globální finanční krize z let 2008-2009.

### 2.1 Charakteristika finančních trhů

Jak uvádí Jílek (1997), trhem se obecně rozumí proces nákupu a prodeje. Obecně ho lze rozčlenit na trh zboží a služeb, trh výrobních činitelů a finanční trh. Finanční trh je nedílnou součástí tržního systému a umožňuje přelévání finančních zdrojů. Soustřeďuje se zde nabídka a poptávka peněz a kapitálu. Na straně nabídky stojí subjekty nabízející své úspory a na straně poptávky subjekty, které tyto volné finanční zdroje potřebují na financování svých aktivit.

Finanční trhy se člení na dluhové trhy, akciové trhy, komoditní trhy (do finančních trhů je zařazen pouze trh s drahými kovy) a devizové trhy. Členění finančního trhu a jednotlivé kategorie jsou zachyceny na obrázku č. 2.1.

**Obr. č. 2.1: Dělení finančních trhů**



Zdroj: Jílek (1997), vlastní zpracování

Dluhovými trhy se rozumí trhy s úvěry a půjčkami a trhy s dluhovými cennými papíry. Tyto nástroje mají omezenou splatnost, výjimku tvoří dluhopisy s nekonečnou splatností, tzv. perpetuity. Naproti tomu akcie, které jsou obchodovány na akciových trzích, představují

nástroj s teoreticky nekonečnou splatností. Akcie přestává existovat až ve chvíli, kdy dojde k likvidaci, rozdělení nebo sloučení emitující společnosti. Komoditní trhy spadají do finančních trhů pouze v případě trhů s drahými kovy (např. zlatem, stříbrem nebo paladiem). Pokud je zlato považováno za měnu, jak tomu v některých případech bývá, pak se zařazuje do kategorie dluhových trhů. Poslední kategorii představují devizové trhy, jež zahrnují jak všechny předešlé kategorie, ovšem s nástroji v cizích měnách, tak i trh peněžních prostředků v různých měnách.

Jak je dále zřejmé z obrázku 2.1, z hlediska tržního rizika odpovídají jednotlivým kategoriím finančního trhu kategorie rizika. Patří sem riziko úrokové, akciové, komoditní a kurzové. Tržní riziko obecně představuje riziko změny hodnoty pozice dříve, než je možné ji zlikvidovat nebo kompenzovat pozicí jinou.

Dluhové a akciové trhy se obvykle člení ještě na trhy peněžní a kapitálové. Rozdíl mezi nimi je dán původní dobou splatnosti příslušných nástrojů. U peněžního trhu je tato splatnost do jednoho roku, v případě kapitálového trhu nad jeden rok.

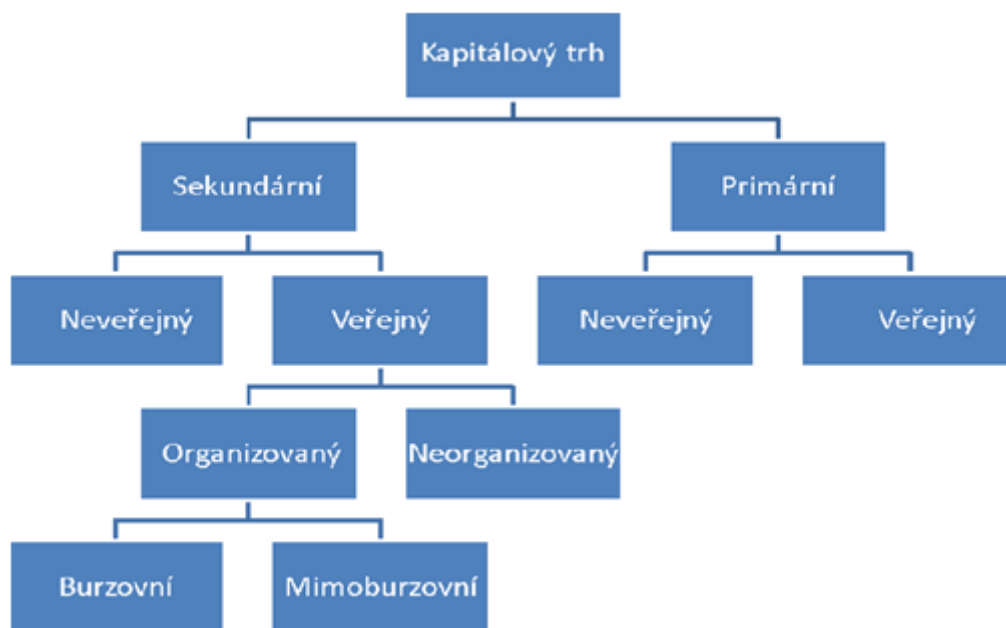
Protože je tato práce zaměřena na modelování a predikci volatility akciových indexů, bude v následující podkapitole stručně popsán princip fungování kapitálových trhů, v rámci kterých obchodování s akciemi probíhá.

### **2.1.1 Kapitálový trh**

Jak již bylo řečeno, kapitálový trh je trhem dlouhodobých finančních instrumentů. Kritériem dlouhodobosti se zpravidla rozumí splatnost delší než 1 rok. Hlavními obchodovanými instrumenty kapitálového trhu jsou především akcie, dluhopisy a podílové listy. Z tohoto důvodu je kapitálový trh nazýván trhem cenných papírů. Cenný papír je obecně listinou, která představuje pohledávku vlastníka vůči emitentovi cenného papíru, je tak nositelem právního nároku, který v sobě ztělesňuje.

Předností cenných papírů je skutečnost, že dlouhodobá vázanost prostředků platí pouze pro emitenta cenného papíru, nikoli pro investora. Investor může cenný papír teoreticky kdykoliv prodat na sekundárním kapitálovém trhu. Motivem pro obchodování na sekundárním trhu jsou kromě likvidity také informace, neboť každý účastník trhu věří, že má lepší informace než ostatní. To může vést k přesvědčení, že je možné nákupem či prodejem realizovat zisk, který je dán rozdílem mezi aktuální tržní cenou a skutečnou hodnotou cenného papíru. Členění kapitálového trhu z hlediska primárního a sekundárního trhu cenných papírů je zachycen na obrázku č. 2.2.

**Obr. č. 2.2: Členění kapitálového trhu**



Zdroj: Nývltová (2007), vlastní zpracování

### 2.1.2 Akciový index

Akcie, stejně jako jiné cenné papíry, bývají obchodovány na burzách. Burzy ani obchodování na burzách nebude popsáno, nicméně pro účely práce je vhodné zmínit funkci akciových indexů, neboť právě jejich volatilita bude v rámci této práce modelována a predikována. Akciové indexy jako podмноžina burzovních indexů slouží investorům jako určité měřítko pro posuzování dlouhodobých výnosů z kapitálu. Jedná se o velmi sledované indikátory vývoje kurzu akcií, které koncentrují pohyby cen mnoha akciových titulů do jednoho čísla, které následně vypovídá o vývojových tendencích trhu. Ve světě existují tři základní metody konstrukce burzovních indexů, a to:

- cenově vážený index, kde jsou váhami aktuální ceny akcií,
- hodnotově vážený index, v němž je každá akcie indexu vážena podílem své tržní kapitalizace na celkové tržní hodnotě všech firem,
- stejně vážený index, který je založen na principu portfolia, přičemž každá akcie je vážena stejně.

Mezi nejvýznamnější evropské indexy patří indexy panevropské burzy Euronext EURONEXT 100, NEXT 150, hlavní index spojeného království FTSE 100 nebo Dow Jones EURO STOXX 50. V Asii jsou to například japonský Nikkei 225 nebo hongkongský HSI Hang Seng Index. Nejvýznamnějším českým indexem je index PX Burzy cenných papírů Praha. Vzorec pro výpočet indexu PX má následující podobu

$$PX50(t) = K(t) \frac{M(t)}{M(t=0)} PX50(t=0) = K(t) \frac{M(t)}{M(t=0)} 1000, \quad (2.1)$$

kde  $M(t)$  je tržní kapitalizace báze v čase  $t$ ,  $M(t=0)$  je tržní kapitalizace v základním (výchozím) čase,  $K(t)$  je faktor zohledňující změny, ke kterým postupně dochází ve změně báze indexu; na počátku je roven hodnotě 1000.

### 2.1.3 Finanční krize

Volatilita akciových indexů je pro účely této práce modelována v kontextu globální finanční krize. Proto je důležité, aby byl v rámci následující kapitoly pojem krize definován a jednotlivé typy finanční krize byly popsány. V odborné literatuře lze nalézt mnoho různých definic finanční krize. Mezinárodní měnový fond vysvětluje systematické finanční krize jako silné rozpady finančních trhů, které zamezují schopnosti efektivně fungovat, a tím mají nepříznivé efekty na reálnou ekonomiku dané země. Kohout (2010) krizi definuje jako nebezpečný stav vývoje, který v rozhodné chvíli vyvrcholí a znemožní další řádné fungování v určité oblasti. Na krizi může navázat těžká situace a zmatek.

Podle Dvořáka (2008) je typologie finančních krizí rozdělena následovně:

- měnová krize,
- bankovní krize,
- úvěrová krize,
- systematická krize.

Při *měnové krizi* dochází k prudkému a neočekávanému oslabení kurzu domácí měny. V režimu pohyblivých kurzů se projevuje depreciačí, v režimu pevného kurzu spekulativními útoky na směnný kurz, čímž je centrální banka donucena k obraně měny nebo k její devalvaci. Příkladem je měnová krize v jihovýchodní Asii v roce 1997 a Brazílii roku 1999.

*Bankovní krizi* označujeme situaci, kdy začíná mít banka problémy související s nedostatečnou likviditou, zejména pak s insolvenčí. Bankovní krize může být charakterizována jak úpadky bank, tak i situací, kdy jsou banky zachraňovány vládními intervencemi. Nejčastěji je tento typ krize způsoben náhlou ztrátou důvěry vkladatelů (v případě rozvojových zemí). Může také vzniknout jako důsledek krize dluhové nebo měnové. Jako příklad lze uvést bankovní krizi ve Španělsku na počátku 90. let 20. století.

*Úvěrová krize* se označuje také jako dluhová krize. U dané země se projevuje jako ztráta schopnosti splácet zahraniční dluh. Existují dva typy. Při externí krizi nejsou schopné zadlužené soukromé firmy a banky splácet své dluhy zahraničním subjektům, příkladem je jihoamerická krize v 80. letech 20. století. Při interní krizi nejsou podniky schopny splácet

dluh domácím subjektům, ekonomika je vnitřně předlužená, což má za následek zamrznutí úvěrového trhu (tzv. credit crunch).

*Systematická krize* představuje prolnutí všech výše uvedených.

Zbývá ještě popsat poslední finanční krizi s počátkem od roku 2008, která zasáhla Spojené státy americké, následně se přelila do světové ekonomiky a jejíž následky ani v nejbližších měsících či letech nevymizí. Její problematikou se zabýval Fleckstein (2009) nebo Roubini (2011).

Po splasknutí bubliny týkající se akcií internetových firem po roce 2000 a následně hrozící recesi přistoupil FED<sup>1</sup> v čele s Alanem Greenspanem ke snížení úrokových sazeb. To mělo za následek obrovskou úvěrovou expanzi, kdy banky začaly ochotně půjčovat finanční prostředky i klientům, u nichž nebyla zaručena schopnost splácet své závazky i po zhoršení své finanční situace.

Stále významnější se stávala sekuritizace – banka jako věřitel prodala hypotéky investiční bance, která je po sloučení s poskytnutými půjčkami nebo úvěry sloučila do balíků CDO<sup>2</sup> s velkými pojistkami, které byly prodávány dalším investorům. Riziko tak bylo přeneseno na jiný subjekt a banky ochotně půjčovaly dál stále rizikovějším klientům. Tyto balíky derivátů získávaly od ratingových agentur vysoká ohodnocení, takže investoři nepochybovali o jejich kvalitě a bezpečnosti. Investovali do nich lidé, banky a instituce z celého světa.

Hypoteční bublina ale v roce 2008 začala splaskávat, klienti přestávali splácet hypotéky a začali bankrotovat. Tím se začaly dostávat do problémů i velké banky. Na podzim roku 2008 zkrachovala jedna z největších a nejstarších bank v USA Lehman Brothers. Vlivem dominového efektu se začaly do obdobné situace dostávat i ostatní velké instituce finančního trhu.

Protože do CDO, jak již bylo zmíněno výše, bylo investováno napříč světadíly, rozšířil se tento problém rychle za hranice Spojených států. Do problému s likviditou se začalo dostávat i velké množství evropských bank hojně investujících do těchto derivátových balíků, což mělo za následek rychlé rozšíření krize i do celé Evropy. Finanční krize poté přešla do krize ekonomické a se značnou silou zasáhla evropské hospodářství.

---

<sup>1</sup> Federal Reserv System (federální rezervní systém), jedná se o centrální banku USA

<sup>2</sup> Collateralized Debt Obligation (zajištěná dluhová obligace)



## 2.2 Vlastnosti finančních časových řad

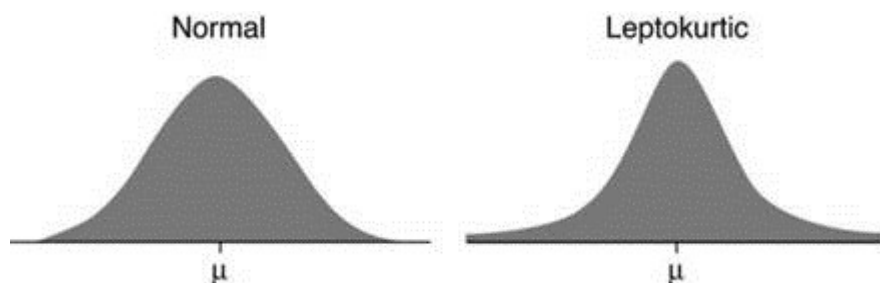
V této kapitole budou rozebrány konkrétní vlastnosti finančních časových řad, a to leptokurtické rozdělení, shlukování volatility a pákový efekt. Tyto vlastnosti jsou následkem působení specifík finančního trhu. Viz Cipra (2008).

### 2.2.1 Leptokurtické rozdělení

Rozdělení finančních výnosů má těžší konce a štíhlejší pas. Jsou špičatější kolem středu, na koncích je hustota větší, v ramenech menší při stejném rozptylu a střední hodnotě, než je tomu u normálního rozdělení. Charakteristickým jevem u leptokurtického rozdělení bývá kladný koeficient špičatosti. Tento typ rozdělení je častý pro finanční data v praxi. Leptokurtické rozdělení pro investora představuje vyšší riziko velké ztráty nebo naopak vyššího zisku, protože je zde ve srovnání s normálním rozdělením vyšší pravděpodobnost výskytu neočekávaných šoků.

Na obrázku č. 2.3 je pro srovnání zobrazeno normální a leptokurtické rozdělení, kde jsou výše uvedené vlastnosti dobře patrné.

**Obr. č. 2.3: Normální a leptokurtické rozdělení**



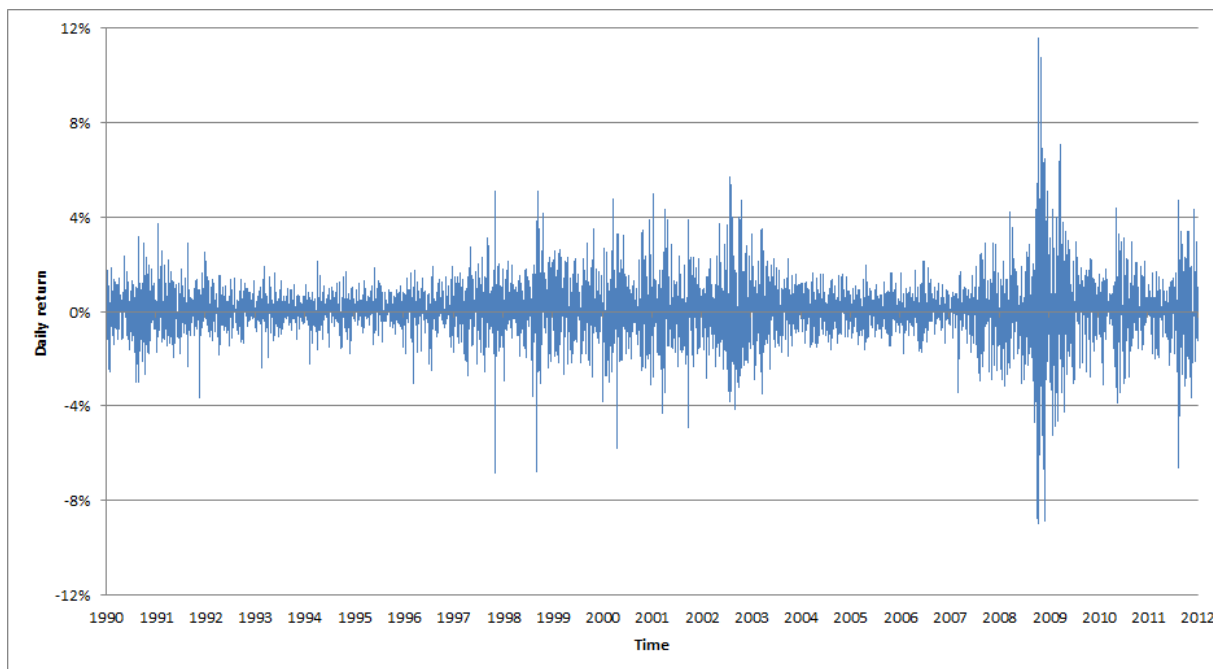
Zdroj: [www.fidelity.com](http://www.fidelity.com)

### 2.2.2 Shlukování volatility

Další významnou empirickou vlastností finančních časových řad je shlukování volatility (volatility clustering). To je následkem skutečnosti, že výnosy, zejména u vysokofrekvenčních dat, jsou sice nekorelované, ale nejsou nezávislé. Volatilita má tendenci objevovat se na finančních trzích ve shlucích tzv. nízkých a vysokých volatilit. Dojde-li k většímu šokovému růstu ceny akcie, vzroste i volatilita, která se udrží delší dobu a vytvoří „shluk velké volatility“, a po odeznění předchozího šoku může dojít k vytvoření „shluku malé volatility“.

Na obrázku č. 2.4 je zachycen vývoj denních výnosů indexu S&P 500 mezi lety 1990 a 2011. Období globální finanční krize mezi rokem 2008 a 2010 je charakteristické výskytem silného shlukování volatility, naopak v období od roku 1992 do roku 1996 se vyskytuje pouhé slabé shlukování volatility.

**Obr. č. 2.4: Vývoj denních výnosů indexu S&P 500 od roku 1990 do roku 2011**



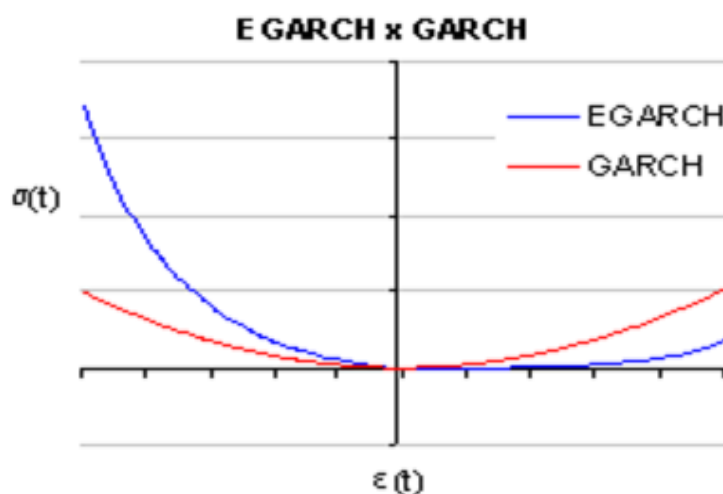
Zdroj: [www.investeem.com](http://www.investeem.com)

### 2.2.3 Pákový efekt

Pákový efekt je nejvýznamnějším z asymetrických efektů, se kterými se lze na finančních trzích setkat. Jedná se o tendenci volatility růst více při cenovém poklesu než po cenovém růstu ve stejné absolutní výši. Tento jev souvisí s kolísáním volatility v čase. Výjimkou, kde se pákový efekt neprojevuje, je měnový trh.

Na obrázku 2.5 jsou zobrazeny modely volatility GARCH a EGARCH. Graf je rozdělen vertikální osou na dvě poloviny, na levé se promítají reakce na negativní zprávy, na pravé reakce na pozitivní zprávy. Jak je zřejmé z obrázku, lineární model GARCH neumí asymetrický efekt zachytit a je symetrický podle vertikální osy. Nelineární model EGARCH tuto vlastnost má, při pohledu na modrou křivku je patrné, že špatná zpráva má na výkyv volatility výraznější efekt než zpráva dobrá.

**Obr. č. 2.5: Zachycení pákového efektu v modelu GARCH a EGARCH**



Zdroj: [www.transtutors.com](http://www.transtutors.com)

## 2.3 Předpoklady finančních časových řad

Mezi základní předpoklady finančních časových řad patří normalita, linearita a stacionarita. Budou rozebrány v následujících podkapitolách. Předpoklady finančních časových řad se zabývá Arlt, Arltová (2003), Cambell, Lo a MacKinlay (1997) nebo Mandelbrot (1963).

### 2.3.1 Normalita

Jedním ze základních předpokladů finančních časových řad, ze kterého se často vychází v teoretických i praktických pracích zabývajících se touto tématikou, je normální rozdělení logaritmu výnosů s konstantní střední hodnotou  $\mu$  a konstantním rozptylem  $\sigma_r^2$ . Tento předpoklad lze zapsat jako  $r_t \sim (\mu, \sigma_r^2)$ , kde  $r_t$  jsou hodnoty časové řady výnosů. Viz Arlt, Arltová (2003). Toto rozdělení je symetrické, a proto jeho šikmost definovaná vztahem

$$SK_r = E \left[ \frac{(r_t - \mu)^3}{\sigma_r^3} \right], \quad (2.2)$$

je rovna nule. Špičatost definovaná vztahem

$$K_t = E \left[ \frac{(r_t - \mu)^4}{\sigma_r^4} \right], \quad (2.3)$$

je rovna 3.

Bodovým odhadem šikmosti je výběrová charakteristika

$$\widehat{SK}_r = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \bar{r})^3}{s_r^3}, \quad (2.4)$$

kde

$$\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t, \quad (2.5)$$

$$s_t = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}. \quad (2.6)$$

Špičatost je odhadnuta výběrovou charakteristikou

$$\hat{K}_r = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \bar{r})^4}{s_r^4}. \quad (2.7)$$

Jak se však ukázalo, hodnoty časových řad i logaritmické výnosy nemají normální rozdělení. Ve skutečnosti je jejich rozdělení výrazně špičatější a mají obvykle tlustší konce, což znamená, že se extrémně vysoké kladné či záporné výnosy vyskytují častěji, než je tomu u normálního rozdělení.

Tato vlastnost finančních časových řad je známá již delší dobu. Od šedesátých let minulého století proto analytici hledali rozdělení, které by lépe charakterizovalo vlastnosti finančních časových řad, a přišlo se tak s návrhem aplikovat tzv. stabilní rozdělení. Jde o třídu rozdělení, která jako zvláštní případ obsahuje také normální rozdělení.

V případě stabilního rozdělení platí, že součet náhodných veličin má stejné rozdělení pravděpodobnosti jako jednotlivé náhodné veličiny. V porovnání s normálním rozdělením mnohem lépe zachycuje výraznější špičatost a tlusté konce rozdělení četností logaritmů výnosů finančních časových řad, což souvisí s jejich charakteristickými vlastnostmi, kterými jsou nekonečný rozptyl a momenty řádu vyššího než dva. Výběrový rozptyl a výběrová charakteristika špičatosti dat generovaných nenormálním stabilním rozdělením s rostoucím rozsahem datového souboru nekonečně rostou, ale rostou do nekonečna. Otázka existence rozptylu stejně jako otázka rozdělení výnosů v krátkém a dlouhém období rozdělila finanční odborníky na dva tábory. Odpůrci zdůrazňují fakt podložený empirickými studiemi, že v praxi rozptyl konverguje a s rostoucím časovým horizontem se logaritmus výnosu blíží normálnímu rozdělení. Právě proto bylo třeba hledat jiné rozdělení, které by vlastnosti finančních časových řad charakterizovalo lépe než normální rozdělení, ale přitom mělo konečný rozptyl a momenty vyššího řádu. V této souvislosti se často diskutuje o Studentovu  $t$  rozdělení.

### 2.3.2 Linearita

Při klasické analýze finančních časových řad se obvykle předpokládá, že logaritmy výnosů jsou nekorelované stejně rozdělené veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem (proces bílého šumu) nebo že jsou nezávislé stejně rozdělené

náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem (striktní proces bílého šumu).

Ve skutečnosti však tyto předpoklady nebývají vždy splněny. Často dochází k tomu, že střední hodnoty jsou nenulové a mezi logaritmy výnosů existuje lineární závislost. Lineární závislost je možné vyjádřit pomocí stacionárních lineárních modelů ARMA, které vycházejí z lineárního procesu tvořeného lineární kombinací nekorelovaných stejně rozdělených náhodných veličin, jejichž typickou vlastností je časová proměnlivost podmíněné střední hodnoty a konstantní charakteristiky polohy a variability.

Proměnlivá variabilita logaritmů výnosů je spojena s další řadou souvislostí. Například že s variabilitou souvisí úroveň a síla autokorelace v časových řadách výnosů nebo že vysoká variabilita obvykle následuje po záporném výnosu. Tyto skutečnosti jsou následkem chování ekonomických subjektů na finančních trzích.

### 2.3.3 Stacionarita

Jak uvádí Arlt, Arltová (2003), důležitou podmínkou pro aplikaci regresní analýzy je stacionarita časové řady. Časovou řadu je možné chápat jako realizaci stochastického procesu – stochastický proces je v čase uspořádaná řada náhodných veličin  $\{X(s, t), s \in \mathbf{S}, t \in \mathbf{T}\}$ , kde  $\mathbf{S}$  je výběrový prostor,  $\mathbf{T}$  indexní řada. Pro každé  $t \in \mathbf{T}$  je  $\mathbf{X}(\cdot, t)$  náhodná veličina definovaná na výběrovém prostoru  $\mathbf{S}$ . Pro každé  $s \in \mathbf{S}$  je  $\mathbf{X}(s, \cdot)$  realizace stochastického procesu definovaná na indexní řadě  $\mathbf{T}$ , tedy uspořádaná řada čísel, kdy každé  $s$  představuje jednu z hodnot indexní řady.

Stochastický proces se považuje za striktně stochastický, pokud pro kteroukoliv konečnou indexní část  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  z  $\mathbf{T} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  a kterékoliv reálné číslo  $k$ , pro které  $t_i + k \in \mathbf{T}$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , platí

$$F(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}), \quad (2.8)$$

kde  $F(\cdot)$  je sdružená distribuční funkce. V případě striktně stochastického procesu je pravděpodobnostní chování stochastického procesu invariantní vůči posunům v čase.

Pro stochastický proces  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  je definována funkce středních hodnot

$$\mu_t = E(X_t), \quad (2.9)$$

varianční funkce

$$\rho_t^2 = D(X_t) = E(X_t - \mu_t)^2, \quad (2.10)$$

kovarianční funkce mezi  $X_{t_i}, X_{t_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$

$$\gamma(t_i t_j) = E(X_t - \mu_{t_i})(X_t - \mu_{t_j}), \quad (2.11)$$

a korelační funkce  $X_{t_i}, X_{t_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$

$$\rho(t_i t_j) = \frac{\gamma(t_i t_j)}{\rho_{t_i} \rho_{t_j}}. \quad (2.12)$$

Pokud pro všechna  $t$  platí, že  $\mu_t = \mu$ ,  $\sigma_t^2 = \sigma$  a korelační i kovarianční funkce závisí jenom na časové vzdálenosti náhodných veličin, tedy pro  $t_i = t - k$  a  $t_j = t$

$$\gamma(t_i t_j) = \gamma(t - k, t) = \gamma(t, t + k) = \gamma_k \quad (2.13)$$

a

$$\rho(t_i t_j) = \rho(t - k, t) = \rho(t, t + k) = \rho_k, \quad (2.14)$$

potom je tento proces označován jako slabě stacionární. V tomto případě stačí, aby byl daný proces invariantní vůči posunům v čase pouze v rámci momentů 2. řádu, je tak méně omezující než striktní.

Před formulací modelů volatility je nutné nejprve provést test stacionarity časových řad, se kterými se bude pracovat. Testů stacionarity existuje několik, např. Dickey-Fullerův test, Phillips-Perronův test, KPSS test aj. Podrobně se jimi zabývá Arlt, Arltová (2003).

U Dickey-Fullerova testu se vychází z procesu

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \alpha_t. \quad (2.15)$$

Při testování hypotézy  $H_0: \phi_1^{(T)}$ , pro  $|\phi_1^{(T)}| < 1$  je testovací kritérium

$$t = \frac{\widehat{\phi}_1 - \phi_1^{(T)}}{S_{\widehat{\phi}_1}}, \quad (2.16)$$

kde  $S_{\widehat{\phi}_1}$  je odhad směrodatné chyby odhadu  $\widehat{\phi}_1$ . Má asymptoticky normované normální rozdělení. V případě malých výběrů má tato statistika zhruba rozdělení  $t$ . To ovšem platí v případě, kdy  $\phi_1^{(T)} = 1$ , potom rozdělení  $t$  není normální ani symetrické.

Jestliže je hodnota Dickey-Fullerova testu větší než kritická hodnota, zamítá se hypotéza jednotkovosti, a tím pádem i nestacionarita časové řady.

## 2.4 Vliv mikrostruktury trhu

Vlastnosti časových řad jsou ovlivňovány především odrazem objektivní situace a vztahů jednotlivých subjektů finančního trhu. Některé z nich jsou ale navíc ovlivněny i aspekty technického a organizačního charakteru, tzv. mikrostrukturou trhu. Zejména při analýzách dlouhodobých časových řad mohou být tyto aspekty opomíjeny, v jiných případech je třeba s jejich vlivem počítat.

Výraznou skutečností, která ovlivňuje charakter časových řad, je tzv. nesynchronní obchodování. Tento efekt vyplývá z předpokladu, že zejména ceny akcií jsou generovány ve stejných časových úsecích. Tak tomu ve skutečnosti není, neboť existují dny, ve kterých

se neobchoduje. „Zadržování“ informace v neobchodních dnech může způsobit zdánlivou autokorelaci v časové řadě logaritmů denních výnosů.

Další komplikace je způsobena tzv. transakční cenou, která se nemusí shodovat s prodejní a kupní cenou, a vyvstává tak otázka, z jaké z cen počítat výnos. Navíc může pohyb ceny mezi nabídkovou a poptávkovou cenou způsobovat zdánlivou variabilitu či autokorelaci. Stejně jako v předchozím případě je vliv tohoto aspektu odlišný v závislosti na konkrétní situaci. V případě krátkých časových řad bude vliv mnohem výraznější než v případě dlouhých.

Posledním příkladem aspektu, který modifikuje charakter finančních časových řad, je skutečnost, že ačkoliv jsou ceny spojitá veličina, jsou uváděny nespojitě, což může způsobit tzv. cenové shlukování.

Mikrostrukturou trhu se zabývá Arlt, Arltová (2003) nebo Campbell, Lo, MacKinlay (1997).

### 3 Základní přístupy k modelování a predikci volatility

Není překvapením, že modelování a predikce volatility je častým předmětem zájmu teoreticky i prakticky orientovaných finančních analýz, neboť volatilita je v současnosti základním měřítkem rizikovosti finančních aktiv. Důkazem je např. bankovní metodika kapitálové přiměřenosti založená na Value at Risk včetně komerčních softwarových produktů typu RiskMetrics.

V první podkapitole je definován pojem volatilita a uvedeny způsoby přístupu ex-ante a ex-post, nastíněn postup aproximace a vyjmenovány oblasti ve financích, ve kterých se volatilita využívá.

Následující dvě podkapitoly jsou pak věnovány vybraným lineárním a nelineárním modelům charakterizujícím podmíněnou heteroskedasticitu, které budou použity v praktické části práce. Jde o rozsáhlou skupinu modelů, jejíž základy definoval Engle definováním modelu ARCH v roce 1982. Modely volatility se na rozdíl od lineárních stochastických modelů a modelů s proměnlivými režimy nezabývají úrovní časových řad, tedy prvním podmíněným momentem, ale jejich variabilitou neboli druhým podmíněným momentem. Umožňují zachytit měnící se podmínky nejistoty na trhu, což odpovídá trendům moderní ekonomické teorie. Možnosti praktické aplikace této skupiny modelů jsou široké. Využívají se např. k tvorbě optimálního portfolia nebo analýze hodnoty v riziku VaR. Mimo jiné umožňují zpřesnění intervalových předpovědí u časových řad.

Předposlední podkapitola je potom věnována problematice konstrukce modelů volatility. Je rozdělena do čtyř částí, v nichž je rozebráno testování podmíněné heteroskedasticity v časových řadách, odhad parametrů, konstrukce předpovědí na základě odhadovaných modelů a diagnostická kontrola.

V poslední podkapitole jsou popsány a formulovány ztrátové funkce.

#### 3.1 Volatilita

Samotný pojem volatilita představuje nestálost, kolísání výnosových měr, měnových kurzů nebo cen investičních instrumentů. Je vyjádřením rizika jednoho aktiva jako rozptyl výnosů či směrodatná odchylka výnosů. Platí, že čím vyšší je volatilita cenného papíru, tím větší je riziko ztráty.

Volatilitu nelze přímo pozorovat, ale lze vypořádat určité charakteristiky, které jsou typické, je-li sledována právě výnosnost různých finančních aktiv. Kromě charakteristik popsanych v kapitole 2.1 sem patří ještě:

- spojitý vývoj bez výrazných skoků,



- spíše stacionární vývoj v určitém rozmezí, volatilita nediverguje k neomezeným hodnotám.

K predikci volatility lze přistupovat dvěma způsoby. Prvním z nich je přístup ex-post, kdy je volatilita počítána jako směrodatná odchylka na základě historických cen daného aktiva a označuje se jako historická volatilita. Výhodou tohoto způsobu predikce je relativně snadná dostupnost zdrojových dat, neboť historické ceny jsou známy s jistotou. Nevýhodou je skutečnost, že se reálná budoucí volatilita může od té minulé výrazně lišit.

V druhém případě se přistupuje k výpočtu ex-ante, výpočet je o něco složitější než v předchozím případě. Používají se oceňovací modely a vychází se z aktuálních kurzů cenných papírů navázaných na určité aktivum, nejčastěji opcí a podobných derivátů. Taková volatilita se označuje jako implikovaná. Jde o trhem očekávanou volatilitu v budoucím období. Budoucím obdobím je obvykle myšleno období od okamžiku výpočtu do doby splatnosti derivátů, jejichž ceny jsou k výpočtu použity.

První metodou, jak lze volatilitu aproximovat, je použití čtverce denních výnosů. Předpokládá-li se obecně používaná rovnice pro výnosy

$$r_t = \mu_t + e_t, e_t = \varepsilon_t \sigma_t, \quad (3.1)$$

kde  $r_t$  je výnos aktiva v čase  $t$  a  $\mu_t$  je vhodně modelovaná střední hodnota výnosů, zdá se přirozeným využití  $e_t^2$  jako veličiny pro použití namísto volatility  $\sigma_t^2$ . Jak poukazuje Lopez (2001), takový postup není vhodný, neboť při předpokladu normálního rozdělení pro  $\varepsilon_t$ , pochází druhá mocnina této veličiny z chí-kvadrát rozdělení  $e_t^2 \sim \chi^2(1)$ . Pokud se vypočte střední hodnota čtverce chybového členu  $e_t^2$ , pak

$$E(e_t^2) = E(\varepsilon_t^2) \sigma_t^2 = \sigma_t^2, \quad (3.2)$$

protože střední hodnota  $E(\chi^2(n)) = n$ , medián  $\chi^2(1) = 0,455$ . To znamená, že  $e_t^2 < \frac{1}{2} \sigma_t^2$  nejméně v polovině případů. Dále na základě výpočtu pravděpodobnosti ukázal, že v 75 % případů je  $e_t^2$  větší nebo naopak menší než  $\sigma_t^2$  minimálně o polovinu. Protože tento způsob aproximace není příliš vhodný, přišel Poon (2005) s novými metodami.

V případě, že je k dispozici dostatek finančních dat naměřených s vyšší časovou frekvencí, než je frekvence volatility, pak lze pro volatilitu v každém časovém okamžiku  $s$  použít vzorec výběrové směrodatné odchylky

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{s-1} \sum_{s=1}^S (r_s - \mu)^2}, \quad (3.3)$$

kde  $S$  je počet měření. Další metody navrhl např. Parkinson (1980) nebo Garman (1980).

Jak uvádí Babula (2010), modely volatility lze použít především ve třech oblastech:

- Risk management – v této oblasti je charakteristické používání modelů Value at Risk (VaR) a Expected Shortfall, které slouží pro stanovení budoucí ztráty z drženého portfolia. Ke stanovení ztráty jsou používány právě předpovědi budoucího vývoje volatility.
- Oceňování opcí – na hodnotu opce má volatilita významný vliv, proto i v tomto případě je její vývoj velmi důležitý.
- Alokace aktiv – modely volatility je také možné použít při tvorbě investičních portfolií.

## 3.2 Lineární modely

Modely volatility, popsané poprvé Englem (1982), jsou charakteristické tím, že podmíněný rozptyl je lineární funkcí veličin  $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$ , proto jsou tyto modely a modely z nich odvozené známé jako lineární modely volatility. V následujících podkapitolách nebudou popsány všechny lineární modely, ale pouze vybrané, ty nejčastěji používané.

### 3.2.1 Model ARCH

Model ARCH je autoregresní model s podmíněnou heteroskedasticitou (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity). Poprvé byl tento model aplikován Englem (1982) na modelování inflace ve Spojeném Království a představoval průlom k systematickému modelování volatility.

Prvním modelem je ARCH(1), má podmíněný rozptyl ve tvaru

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2. \quad (3.4)$$

Má-li být podmíněný rozptyl kladné číslo, musí platit, že  $\omega > 0$  a  $\alpha_1 \geq 0$ . V případě, že  $\alpha = 0$ , je podmíněný rozptyl konstantní v čase a proces  $\{\varepsilon_t\}$  se označuje za podmíněně homoskedastický. Autoregresní tvar modelu lze získat po přičtení  $\varepsilon_t^2$  k oběma stranám rovnice (3.4) a odečtením  $h_t$

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + v_t, \quad (3.5)$$

kde  $v_t = h_t(\varepsilon_t^2 - 1)$ . Proces  $\{v_t\}$  je neautokorelovaný, protože podmíněná i nepodmíněná střední hodnota procesu je nulová. Proces ARCH(1) je stacionární v kovariancích, jestliže  $\alpha_1 < 1$ , nepodmíněný rozptyl procesu  $\{\varepsilon_t\}$  má tvar

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}, \quad (3.6)$$

to znamená, že je konstantní v čase a proces  $\{\varepsilon_t\}$  je nepodmíněně homoskedastický a autokorelační funkce má ve zpoždění  $k$  hodnotu  $\alpha_1^k$ .

Kromě toho, že model umožňuje zachytit shluky volatility v časové řadě výnosů, lze zachytit i vyšší špičatost pravděpodobnostního rozdělení výnosů. Lze dokázat, že špičatost náhodných veličin  $\varepsilon_t$  má pro  $3\alpha_1^2 < 1$  tvar

$$K_\varepsilon = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2}, \quad (3.7)$$

jinak je  $\infty$ . Špičatost  $K_\varepsilon$  je vždy větší než špičatost normálního rozdělení (tj. 3).

Druhým modelem je ARCH( $q$ ), zde má podmíněný rozptyl formu

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2, \quad (3.8)$$

kladný podmíněný rozptyl je zaručen podmínkami  $\omega > 0$  a  $\alpha_i \geq 0$  pro  $i=1,2,\dots,q$ .

Model ARCH ( $q$ ) vyjádřený v autoregresním tvaru má následující podobu

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + v_t, \quad (3.9)$$

kde  $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ . Vyjádření modelu pomocí operátoru zpětného posunutí vypadá takto

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) \varepsilon_t^2 = \omega + v_t. \quad (3.10)$$

Proces ARCH( $q$ ) je stacionární v kovariancích, pokud leží kořeny polynomiální rovnice

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) = 0 \quad (3.11)$$

vně jednotkového kruhu. Nepodmíněný rozptyl  $\{\varepsilon_t\}$  má tvar

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q}, \quad (3.12)$$

což znamená, že je konstantní v čase a proces  $\{\varepsilon_t\}$  je nepodmíněně homoskedastický.

### 3.2.2 Model GARCH

Model GARCH (Generalized ARCH) odbourává nedostatky předchozí třídy modelů. Někdy je třeba použít při modelování časových řad modely ARCH( $q$ ), kde je vyžadován vysoký řád  $q$ , aby bylo možné popsat vývoj volatility dané řady odpovídajícím způsobem. S tím také souvisí nutnost odhadnout velké množství parametrů, u nichž může být porušena podmínka nezápornosti. Modely ARCH navíc nezohledňují pákový efekt (viz 2.2.3). V reakci na zmíněné nedostatky navrhl Bollerslev (1986) model GARCH, jehož podstata spočívá v zavedení zpožděného podmíněného rozptylu. V případě modelu ARCH(1) vypadá model podmíněného rozptylu rozšířeného o podmíněný rozptyl v prvním zpoždění takto

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad (3.13)$$

kladný rozptyl je zaručen podmínkami  $\omega > 0$ ,  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ . Model (3.13) se označuje jako GARCH(1,1).

Pomocí operátoru zpětného posunutí ho lze vyjádřit následovně

$$(1 - \beta_1 B) h_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad (3.14)$$

kde

$$h_t = (1 - \beta_1 B)^{-1}(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2) = (1 + \beta_1 B + \beta_1^2 B^2 + \dots)(\omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2), \quad (3.15)$$

což je model ARCH( $\infty$ ). Model GARCH(1,1) se tedy používá v případech, kdy by bylo vhodné užít model ARCH s mnoha zpožděními.

Po přičtení  $\varepsilon_t^2$  k oběma stranám rovnice (3.13) a odečtením  $h_t$  je možné model (3.13) přepsat do tvaru modelu ARMA(1,1)

$$\varepsilon_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta_1)\varepsilon_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 v_{t-1}, \quad (3.16)$$

kde  $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ . Z tohoto modelu plyne, že model GARCH(1,1) je stacionární v kovariancích, pokud platí  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ . Nepodmíněný rozptyl procesu  $\{\varepsilon_t\}$  má formu

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad (3.17)$$

což znamená, že je konstantní v čase a proces  $\{\varepsilon_t\}$  je nepodmíněně homoskedastický. Z modelu (3.16) je také zřejmý důvod podmínky  $\alpha_1 > 0$ . Pokud by  $\alpha_1 = 0$ , nebylo by možné identifikovat parametr  $\beta_1$ , neboť by platil vztah

$$\varepsilon_t = \frac{1 - \beta_1 B}{1 - \beta_1 B} v_t = v_t. \quad (3.18)$$

Bollerslev (1986) ukázal, že špičatost náhodných veličin  $\varepsilon_t$  má pro  $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$  tvar

$$K_\varepsilon = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{3(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2}, \quad (3.19)$$

jinak je její hodnota  $\infty$ . Špičatost  $K_\varepsilon$  je vždy větší než špičatost normálního rozdělení (tj. 3).

Bollerslev (1988) odvodil autokorelační funkci procesu  $\{\varepsilon_t\}$

$$\rho_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha_1^2 \beta_1}{1 - 2\alpha_1 \beta_1 - \beta_1^2}, \quad (3.20)$$

$$\rho_k = (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \rho_1 \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.21)$$

S rostoucím zpožděním  $k$  hodnoty autokorelační funkce exponenciálně klesají. Totéž platí i pro hodnoty parciální autokorelační funkce. Rychlost poklesu závisí na hodnotě součtu  $\alpha_1 + \beta_1$ . Čím více se se hodnota toho součtu blíží 1, tím je pokles autokorelační funkce pozvolnější.

Podmíněný rozptyl obecného modelu GARCH( $p, q$ ) lze zapsat buď ve tvaru

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}, \quad (3.22)$$

nebo pomocí operátoru zpětného posunutí

$$h_t = \omega + \alpha(B)\varepsilon_t^2 + \beta(B)h_t, \quad (3.23)$$

kde  $\alpha(B) = \alpha_1 B + \dots + \alpha_q B^q$  a  $\beta(B) = \beta_1 B + \dots + \beta_p B^p$ , kladný podmíněný rozptyl je dán podmínkami  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i > 0$  pro  $i=1,2,\dots,q$  a  $\beta_i \geq 0$  pro  $i=1,2,\dots,p$ . Stejně jako model GARCH(1,1) také model GARCH( $p,q$ ) lze vyjádřit také jako model ARCH( $\infty$ ).

Modifikací modelu GARCH, kdy se přidá restrikce ve tvaru  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ , vznikne model IGARCH, který je rovněž použit v praktické části diplomové práce. Více Arlt, Arltová (2003).

### 3.3 Nelineární modely

Nelineární modely volatility byly formulovány v důsledku neschopnosti lineárních modelů zohlednit asymetrické efekty - nejvýznamnějším z nich je tzv. pákový efekt, ten znamená, že se do podmíněného rozptylu nepromítají kladné a záporné šoky symetricky, a mají tak stejný efekt. V rámci této kapitoly budou popsány vybrané nelineární modely volatility. Odlišnosti jednotlivých modelů spočívají v zachycení pákového efektu. Viz Arlt, Arltová (2003).

#### 3.3.1 Model EGARCH

Model EGARCH (exponencial GARCH) navržený Nelsonem (1991) byl první model, který dokázal zachytit asymetrický efekt. Podmíněný rozptyl (resp. jeho přirozený logaritmus) má v modelu EGARCH(1,1) tvar

$$\ln(h_t) = \omega + g(e_{t-1}) + \beta_1 \ln(h_{t-1}), \quad (3.24)$$

kde

$$g(e_{t-1}) = \alpha_1 e_{t-1} + \gamma_1 (|e_{t-1}| - E(|e_{t-1}|)). \quad (3.25)$$

Není nutné formulovat omezení na parametry  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , která by zajistila nezápornost podmíněného rozptylu, neboť model EGARCH popisuje vztah mezi logaritmem podmíněného rozptylu a minulými šoky. Proces  $\{g(e_t)\}$  má nulovou střední hodnotu a není autokorelovaný, což vyplývá z vlastností procesu  $\{\varepsilon_t\}$ .

Schopnost zachytit asymetrii ve vztahu podmíněného rozptylu a šoků plyne za zápisu funkce  $g(e_t)$  ve tvaru

$$g(e_t) = (\alpha_1 + \gamma_1)e_t I(e_t > 0) + (\alpha_1 - \gamma_1)e_t I(e_t < 0) - \gamma_1 E(|e_{t-1}|), \quad (3.26)$$

kde  $I(A)$  je funkce nabývající hodnoty 1, nastane-li jev  $A$ , a hodnoty 0, pokud nenastane. Vliv kladných šoků je dán součtem parametrů kladných šoků ( $\alpha_1 + \gamma_1$ ) a záporných šoků ( $\alpha_1 - \gamma_1$ ).

Obecný tvar modelu EGARCH( $p,q$ ) je možné vyjádřit tvarem

$$(1 - \beta(B))\ln(h_t) = \omega + (1 - \varphi(B))g(e_{t-1}), \quad (3.27)$$

nebo jako

$$\ln(h_t) = (1 - \beta(1))^{-1}\omega + (1 - \beta(B))^{-1}(1 - \varphi(B))g(e_{t-1}), \quad (3.28)$$

kde

$$\beta(B) = \sum_{i=1}^p \beta_i B^i, \varphi(B) = \sum_{i=1}^p \varphi_i B^i \text{ a } g(e_{t-1}) = \alpha_1 e_{t-1} + \gamma_1(|e_{t-1}| - E(|e_{t-1}|)),$$

Zachycení asymetrického efektu modelem EGARCH je zobrazeno v kapitole 2.3 na obrázku č. 2.5.

### 3.3.2 Model CGARCH

Dalším nelineárním modelem, který bude v této práci použit, je Component GARCH. Při jeho konstrukci se vychází z podmíněného rozptylu modelu GARCH(1,1), který lze zapsat ve tvaru

$$\sigma_t^2 = \bar{\omega} + \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - \bar{\omega}) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - \bar{\omega}), \quad (3.29)$$

kde se průměr navrácí k hodnotě  $\bar{\omega}$ , která je po celou dobu konstantní. Model Component ARCH (1,1) ale povoluje i návrat k nestálé hodnotě  $m_t$ , což lze zapsat jako

$$\sigma_t^2 - m_t = \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - m_{t-1}) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - m_{t-1}) \quad (3.30)$$

$$m_t = \omega + \rho(m_{t-1} - \omega) + \phi(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2),$$

kde  $\sigma_t^2$  je volatilita,  $\omega$  bylo nahrazeno  $m_t$ , a jedná se tedy o v čase nestálou dlouhodobou volatilitu. První rovnice popisuje přechodnou složku  $\sigma_t^2 - m_t$ , která konverguje k nule hodnotou  $(\alpha + \beta)$ . Druhá rovnice představuje dlouhodobou složku  $m_t$ , která konverguje k hodnotě  $\omega$  hodnotou  $\rho$ . Hodnota  $\rho$  se obvykle pohybuje v intervalu od 0,99 do 1, takže  $m_t$  se přibližuje  $\omega$  velmi pomalu.

Asymetrický Component ARCH model kombinuje lineární CGARCH model s asymetrickým TARCH modelem, zavedením asymetrických efektů do rovnice přechodné volatility se pak odhadnou modely ve formě

$$m_t = \omega + \rho(m_{t-1} - \omega) + \phi(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) + \theta_1 z_{1t} \quad (3.31)$$

$$\sigma_t^2 - m_t = \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - m_{t-1}) + \gamma(\varepsilon_{t-1}^2 - m_{t-1})d_{t-1} + \beta(\sigma_{t-1}^2 - m_{t-1}) + \theta_2 z_{2t},$$

kde  $z$  jsou exogenní proměnné a  $d$  je proměnná indikující negativní šoky.  $\gamma > 0$  indikuje v modelu přítomnost přechodných pákových efektů v podmíněném rozptylu. Více se tímto modelem zabývá např. Bauwens, Storti (2008).

### 3.4 Konstrukce modelů volatility

Při výstavbě lineárních a nelineárních modelů volatility doporučuje Arlt, Arltová (2003) po určení vhodného lineárního nebo nelineárního úrovnového modelu postupovat v krocích, které jsou obsahem následujících podkapitol.

#### 3.4.1 Testování podmíněné heteroskedasticity v časových řadách

Tato podkapitola má tři části, první je věnována testování podmíněné heteroskedasticity lineárního typu, druhá testování heteroskedasticity nelineárního typu a poslední problému zdánlivé heteroskedasticity a odlehklých pozorování.

Test podmíněné heteroskedasticity založený na principu Lagrangeových multiplikátorů (LM) byl vytvořen Englem (1982) a vychází z formulace modelu ARCH. Podmíněný rozptyl  $h_t$  v modelu ARCH( $q$ ) ve tvaru (3.8) je konstantní, pokud se parametry odpovídající veličinám  $\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$  rovnají nule. Nulová hypotéza, tedy hypotéza podmíněné homoskedasticity, je definována jako rovnost všech parametrů nule. Alternativní hypotéza se přijímá v případě, že je alespoň jeden z parametrů různý od nuly. Při testu se postupuje v následujících krocích:

1. Proveďte se odhad parametrů lineárního nebo nelineárního úrovnového modelu a získají se rezidua  $\hat{\varepsilon}_t^2$  a reziduální součet čtverců  $ESS_0$ .
2. Zkonstruuje se regresní model ve tvaru

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t, \quad (3.32)$$

na jehož základě je získán reziduální součet čtverců  $ESS_1$  a koeficient determinace  $R^2$ .

3. Testové kritérium LM tvaru  $T \cdot R^2$  má asymptotické rozdělení  $\chi^2(q)$  za předpokladu platnosti nulové hypotézy.
4. V případě malých výběrů má F-verze tohoto testovacího kritéria tvar

$$F_{LM} = \frac{(ESS_0 - ESS_1)/q}{ESS_1/(T - q - 1)}, \quad (3.33)$$

její rozdělení se dá za předpokladu nulové hypotézy aproximovat rozdělením  $F(q, T - q - 1)$ .

Tento test bývá označován jako ARCH test, lze jej rovněž interpretovat jako test autokorelace čtverce nesystematické složky.

V případě testování podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu existují dvě základní strategie. U první z nich se nejprve zvolí lineární model volatility a provede se odhad jeho parametrů, poté se zkoumá, je-li tento model vhodný, nebo zda by bylo lepší

vzhledem k asymetriím v datech zvolit nějaký nelineární typ modelu. Tento typ strategie je ale spíše možné zahrnout do metod diagnostické kontroly modelu.

Druhá strategie je obdobou ověřování podmíněné heteroskedasticity lineárního typu. Testuje se hypotéza podmíněné homoskedasticity proti hypotéze podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu. Problematikou ověřování rozdílnosti vlivu kladných a záporných výnosů na podmíněnou heteroskedasticitu se zabývali Engle a Ng (1993). Jako  $S_{t-1}^-$  je označována umělá proměnná (tzv. „dummy“ proměnná), která nabývá hodnoty 1, pokud je  $\hat{\varepsilon}_{t-1}$  záporné, a hodnoty 0 v opačném případě. Pomocnou proměnnou je  $S_{t-1}^+ = 1 - S_{t-1}^-$ .

SB test („Sign Bias Test“) se využívá k testování vlivu kladných a záporných výnosů (bez ohledu na jejich výši) na podmíněnou heteroskedasticitu. Vychází se z modelu

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \phi_0 + \phi_0 \hat{\omega}_{t-1} + u_t, \quad (3.34)$$

kde  $\hat{\varepsilon}_t^2$  je čtverec rezidua lineárního nebo nelineárního úrovnového modelu a  $\hat{\omega}_{t-1} = S_{t-1}^-$ . Testovým kritériem je statistika  $t$ , nulová hypotéza je zapsána ve tvaru  $\phi_0 = 0$ , alternativní ve tvaru  $\phi_0 \neq 0$ .

Pokud v modelu (3.31)  $\hat{\omega}_{t-1} = S_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1}$ , případně  $\hat{\omega}_{t-1} = S_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1}$ , nazývá se test „Negative Size Bias“ (NSB), respektive „Positive Size Bias“ (PSB). Pomocí těchto testů se ověřuje, jestli vliv záporných nebo kladných výnosů závisí také na jejich výši. Rozdělení statistiky  $t$  je ve všech předchozích případech asymptoticky normované normální.

Uvedené testy lze sjednotit, přičemž se vychází z následujícího postupu:

1. Zkonstruuje se regresní model

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \phi_0 + \phi_1 S_{t-1}^- + \phi_2 S_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1} + \phi_3 S_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t, \quad (3.35)$$

na základě kterého se získá reziduální součet čtverců  $ESS_1$  a index determinace  $R^2$ . Pakliže jsou všechny parametry  $\phi$  rovny nule, je přijata nulová hypotéza, což znamená, že v časové řadě není asymetrie uvažovaného typu. V opačném případě je přijata alternativní hypotéza.

2. Testové kritérium LM tvaru  $T \cdot R^2$  má asymptotické rozdělení  $\chi^2(3)$  za předpokladu platnosti nulové hypotézy.
3. Pro malé výběry má F-verze tohoto testového kritéria podobu

$$F_{LM} = \frac{(ESS_0 - ESS_1)/3}{ESS_1/(T-4)}, \quad (3.36)$$

kde  $ESS_0$  je reziduální součet čtverců  $\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ , její rozdělení je možné za předpokladu nulové hypotézy aproximovat rozdělením  $F(3, T-4)$ .



Posledním tématem této podkapitoly je problematika zdánlivé podmíněné heteroskedasticity a odlehlých pozorování.

V praxi se výsledky testů heteroskedasticity často velmi obtížně interpretují. Zamítnutí nulové hypotézy podmíněné homoskedasticity může být způsobeno chybami učiněnými při hledání vhodného modelu, kdy je opomenuto zařazení další vysvětlující proměnné, nepřihlédnuto k autokorelaci nebo nějakému typu nelinearity.

Významným problémem jsou také odlehlá pozorování. Neberou-li se v úvahu, mají za následek příliš časté zamítnutí nulové hypotézy podmíněné homoskedasticity. Způsob, jakým je možné překonat tuto pravděpodobnost chyby I. řádu, je použití testu heteroskedasticity, který je robustní vůči odlehlým pozorováním. Postup při testování podmíněné heteroskedasticity na základě modelu ARCH( $q$ ) lze rozdělit do čtyř kroků:

1. Na základě vážených reziduí  $\hat{\omega}_e(\hat{\varepsilon}_t)\hat{\varepsilon}_t = \hat{\psi}(\hat{\varepsilon}_t)$ , jejichž zjištění předchází odhad parametrů úrovnového lineárního modelu pomocí vážené metody nejmenších čtverců, se vypočítá reziduální součet čtverců  $ESS_0^{(w)}$ .
2. Zkonstruuje se regresní model, kdy na levé straně je  $\hat{\psi}(\hat{\varepsilon}_t)^2$ , na pravé je konstanta a  $\hat{\psi}(\hat{\varepsilon}_{t-1})^2, \dots, \hat{\psi}(\hat{\varepsilon}_{t-q})^2$ . Na základě tohoto regresního modelu se získá reziduální součet čtverců  $ESS_1^{(w)}$  a index determinace  $R^2$ .
3. Testové kritérium LM tvaru  $T \cdot R^2$  má asymptotické rozdělení  $\chi^2(q)$  za předpokladu platnosti nulové hypotézy.
4. F-verze tohoto testového kritéria má podobu (3.33)

### 3.4.2 Odhad parametrů

Klasický model výnosů finančních časových řad má dvě části. První z nich je lineární nebo nelineární model úrovně časové řady, druhá je lineární nebo nelineární model volatility časové řady. Takový model lze zapsat ve formě

$$X_t = G(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\eta}) + \varepsilon_t, \quad (3.37)$$

kde  $\mathbf{X}_t = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$ ,  $G(\mathbf{X}_t, \boldsymbol{\eta})$  je kostra lineárního nebo nelineárního autoregresního modelu s parametry  $\boldsymbol{\eta}$ , kterou je možné minimálně dvakrát spojitě derivovat vzhledem k těmto parametrům, a  $\{\varepsilon_t\}$  je proces s nulovou podmíněnou střední hodnotou a podmíněným rozptylem  $h_t$  typu lineárního či nelineárního modelu GARCH s parametry  $\boldsymbol{\varphi}$ . Vektorem parametru modelu (3.33) je  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\eta}' \boldsymbol{\varphi}')'$ .

Parametry je možné odhadnout pomocí metody maximální věrohodnosti. Pokud má  $\varepsilon_t$  normované normální rozdělení, logaritmus věrohodnostní funkce pro časovou řadu s rozsahem  $T$  pozorování má tvar

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.38)$$

kde

$$l_t(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln h_t - \frac{\varepsilon_t^2}{2h_t}. \quad (3.39)$$

Maximálně věrohodný odhad  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  lze získat maximalizací logaritmu funkce (3.39). Poté je řešena rovnice

$$\sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0. \quad (3.40)$$

Vztah  $\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$  se označuje jako skórová funkce  $s_t(\boldsymbol{\theta})$ . Může být rozložena do dvou složek, které odpovídají modelu úrovněvému a modelu volatility, tzn.  $s_t(\boldsymbol{\theta}) = \left( \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\eta}'}, \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\varphi}'} \right)$ , kde

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\eta}'} = \frac{\varepsilon_t}{h_t} \frac{\partial G(X_t, \boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{2h_t} \left( \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\varphi}'} = \frac{1}{2h_t} \left( \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial h_t}{\partial \boldsymbol{\varphi}}. \quad (3.42)$$

Jelikož je podmínka (3.40) v parametrech nelineární, bývá pro získání maximálně věrohodného odhadu používána iterativní optimalizační procedura. Je-li  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}$  odhadem parametru získaného v  $i$ -té iteraci, získá se pak  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)}$  ze vztahu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)} - \lambda \left( \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial l_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right)^{-1} \sum_{t=1}^T s_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(i)}). \quad (3.43)$$

Je-li podmíněné rozdělení pravděpodobnosti správně určeno, odhad parametrů je konzistentní a asymptoticky normální. Podmínka normality procesu  $\{\varepsilon_t\}$  ovšem nebývá v případě finančních časových řad často splněna. Nepodaří-li se zachytit skutečnou špičatost rozdělení, opouští se předpoklad normality a přijímá se jiný předpoklad, např. že veličina  $e_t$  má Studentovo rozdělení. Ve velkém množství případů se postupuje tak, že se nebere v potaz rozdělení, neboť v praxi je obtížné ho určit, a předpokládá se automaticky normalita. Taková metoda se potom označuje jako quasi metoda maximální věrohodnosti.

Pokud jsou modely úrovněvé a modely volatility určeny správně, jsou takto získané odhady stále konzistentní a asymptoticky normální. Touto problematikou se zabýval Weiss (1984), Bollerslev, Wooldridge (1992) nebo Lee, Hansen (1994).

### 3.4.3 Konstrukce předpovědí na základě odhadnutých modelů

Protože ve skutečnosti nejsou parametry modelů známy, jsou bodové odhady a jejich střední čtvercové chyby modifikovány. Jsou-li k dispozici odhady parametrů modelu volatility, potom v případě modelu GARCH( $p, q$ ) je bodová předpověď s horizontem  $h$  konstruovaná v čase  $T$

$$\hat{h}_T(h) = \hat{\omega} + \hat{\alpha}_1 \hat{\varepsilon}_T^2(h-1) + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\varepsilon}_T^2(h-q) + \hat{\beta}_1 \hat{h}_T(h-1) + \dots + \hat{\beta}_p \hat{h}_T(h-p). \quad (3.44)$$

Předpovědní chyba má tvar

$$\hat{l}_T(h) = h_{T+h} - \hat{h}_T(h) = l_T(h) + h_T(h) - \hat{h}_T(h). \quad (3.45)$$

Je zřejmé, že střední čtvercová chyba předpovědi je vyšší než střední čtvercová chyba za předpokladu známých parametrů modelů volatility.

### 3.4.4 Diagnostická kontrola

V této podkapitole bude rozebrán test nesystematické složky modelu (test heteroskedasticity, normality a autokorelace) a výběr modelu dle informačního kritéria.

Modely volatility vycházejí ze základní formulace, kde se předpokládá, že

$$e_t = \varepsilon_t h_t^{1/2} \quad (3.46)$$

jsou nezávislé, s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem a někdy se předpokládá normované normální rozdělení. Pokud je model správně určen, potom by měla standardizovaná rezidua

$$\hat{e}_t = \hat{\varepsilon}_t \hat{h}_t^{1/2} \quad (3.47)$$

tyto vlastnosti nesystematické složky indikovat.

- Test heteroskedasticity

Jde o test standardizovaných reziduů získaných odhadem modelu GARCH, zda ještě vykazují podmíněnou heteroskedasticitu typu ARCH. Test má čtyři kroky:

1. Odhadnou se parametry modelu GARCH( $p, q$ ) a získají se standardizovaná rezidua a reziduální součet čtverců ESS<sub>0</sub>.
2. Zkonstruuje se regresní model s konstantou, kde nalevo je  $\hat{e}_t$  a napravo

$$\hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-m}^2 \text{ a } \hat{x}_t = \hat{h}_t^{-1} \frac{\partial \hat{h}_t}{\partial \hat{\varphi}}, \quad (3.48)$$

na jehož základě je získán reziduální součet čtverců ESS<sub>1</sub> a index determinace R<sup>2</sup>.

3. Testové kritérium LM tvaru  $T \cdot R^2$ , které testuje, že parametry u veličin  $\hat{\varepsilon}_{t-1}^2, \dots, \hat{\varepsilon}_{t-m}^2$  jsou nulové, má asymptotické rozdělení  $\chi^2(m)$  za předpokladu platnosti nulové hypotézy.
4. F-verze testového kritéria je

$$F_{LM} = \frac{(ESS_0 - ESS_1)/m}{ESS_1/(T-p-q-1-m)}, \quad (3.49)$$

její rozdělení je možné aproximovat rozdělením  $F(m, T - p - q - 1 - m)$ .

- Test normality

V této práci bude použit Jarque – Bera test založený na principu paralelního testování šikmosti a špičatosti. Vychází se přitom z faktu, že šikmost (třetí normovaný moment) normálního rozdělení je 0 a špičatost (čtvrtý normovaný moment) normálního rozdělení je 3.

Testové kritérium Jarque-Bera testu vypadá následovně

$$JB = (SK^2 + KU^2), \quad (3.50)$$

kde  $SK$  je testové kritérium pro testování šikmosti rozdělení

$$SK = \left(\frac{T}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hat{m}_3^2}{\hat{m}_2^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.51)$$

$KU$  testové kritérium pro testování špičatosti rozdělení

$$KU = \left(\frac{T}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hat{m}_4}{\hat{m}_2^2} - 3\right), \quad (3.52)$$

přičemž

$$\hat{m}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{a}_t^j, \quad j = 1, 2, 3 \dots \quad (3.53)$$

V případě nulové hypotézy, při které je konstatována normalita nesystematické složky modelu, mají obě statistiky asymptoticky normované normální rozdělení  $N(0,1)$ . Statistika Jarque-Bera má rozdělení  $\chi^2(2)$ . K zamítnutí nulové hypotézy může vést i skutečnost, že nesystematické složky jsou heteroskedastické.

- Test autokorelace

Autokorelaci nesystematické složky modelu je možné hodnotit pomocí výběrové autokorelační funkce

$$\hat{p}_k = \frac{\sum_t \hat{a}_t \hat{a}_{t-k}}{\sum_t \hat{a}_t^2}. \quad (3.54)$$

Pokud není nesystematická složka autokorelovaná, pak by hodnoty této funkce měly ležet uvnitř intervalu  $\pm 2\sqrt{T}$  (95% interval spolehlivosti). Další možností, jak ověřit nepřítomnost autokorelace nesystematické složky, je použití portmanteau testu, u kterého je testována hypotéza  $H_0: \rho_1 = \rho_2 \dots = \rho_k = 0$  proti hypotéze  $H_1: \text{non } H_0$ , kde  $\rho_k, k = 1, \dots, K$ , jsou autokorelace nesystematické složky modelu pro zpoždění  $k$ .

Testové kritérium je potom konstruováno způsobem

$$Q = T \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2 \quad (3.55)$$

kde pro vysoké  $T$  a  $K$  má statistika rozdělení  $\chi^2$  s  $(K-p-q)$  stupni volnosti. Porovnáním testového kritéria s příslušnými kvantily rozdělení  $\chi^2$  s  $(K-p-q)$  je možné testovat hypotézu o neautokorelaci hodnot nesystematické složky.

- Výběr modelu dle informačního kritéria

Jestliže dojde k identifikaci dvou, případně více přijatelných modelů, vzniká otázka, jaký z nich zvolit. Pro výběr modelu existují dva základní přístupy. U prvního z nich se ještě dále zkoumají a pozorují odhadnutá rezidua a následně je upřednostněn ten model, který má menší hodnotu odhadu reziduálního rozptylu a menší počet parametrů. Výběr nejvhodnějšího modelu vychází z hodnocení následujících kritérií:

1) Akaikeho informační kritérium, které je definováno jako

$$AIC = -2L/n + 2k/n, \quad (3.56)$$

kde  $k$  je počet odhadovaných parametrů,  $n$  počet pozorování a  $L$  hodnota funkce maximální věrohodnosti.

2) Schwartzovo informační kritérium má podobu

$$SC = -2L/n + k \log(n)/n. \quad (3.57)$$

Informační kritéria slouží k určení míry informací, které postihují rovnováhu mezi mírou významnosti a šetrnou specifikací modelu. Jednotlivá informační kritéria se liší v míře, kterou vyhoví takové rovnováze. Pokud jsou při výběru vhodného typu modelu využita informační kritéria, pak je vybrán model s nejmenšími hodnotami těchto kritérií. Informačních kritérií je také často využíváno při určování příslušné délky zpoždění u analýzy časových řad.

U druhého způsobu určování vhodnosti modelu se porovnávají přesnosti předpovědí, které je možné získat z výpočtů jednotlivých modelů. Časová řada je rozdělena na dvě části, přičemž modely jsou odhadnuty na základě první části a druhá část je následně použita pro měření přesnosti predikce „ex post“.

### 3.5 Ztrátové funkce

Následující kapitola bude zaměřena na proces výběru vhodného modelu. Porovnávat modely lze buď z pohledu "in-the-sample", tedy jak dobře jsou schopny popsat skutečnost, nebo "out-of-the-sample", který vyjadřuje schopnost předpovědět budoucnost. Lopez (2001) doporučuje používat spíše druhou skupinu metod. Hlavním důvodem je fakt, že predikce má

stěžejní význam, takže model s nepřesnější predikcí bude také logicky vyhledávanější. Zároveň lze předpokládat, že dobrá shoda modelu s daty je předpokladem pro dobrou predikci.

Ideální by byla taková metoda, která by informovala o relativní či absolutní užitečnosti modelu. Aby bylo možné hodnotit užitečnost, je třeba stanovit, jak užitečnost vůbec měřit. Užitečnost je ve skutečnosti obtížné definovat, takže se přistupuje ke zjednodušenému přístupu - používají se tzv. ztrátové funkce. Pro každý model je vypočtena hodnota ztrátové funkce a na základě této hodnoty je určeno, který model je nejlepší. Je třeba si uvědomit, že i samotné ztrátové funkce podléhají určitým šumům nebo chybám. To znamená, že je-li ztrátová funkce jednoho modelu větší než druhého, nelze ještě s jistotou tvrdit, že je druhý model lepší, ale je nutné ověřit významnost testu. V následujícím výčtu jsou uvedeny nejznámější ztrátové funkce. Zmiňuje je Poon (2005) nebo Lopez (2001).

a) Mean Square Error (MSE) – průměr čtverců chyb

$$MSE = \frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} \epsilon_t^2 = \frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} (\hat{\sigma}_t - \sigma_t)^2 \quad (3.58)$$

je klasickým statistickým nástrojem pro srovnávání predikcí. Členem  $\hat{\sigma}_t$  se označuje predikovaná hodnota a členem  $\sigma_t$  skutečná hodnota volatility pro  $T^*$  predikovaných období. Nedostatkem MSE je symetrická podoba ztrátové funkce, která nedostatečně penalizuje záporný rozptyl. Dalšími ztrátovými funkcemi jsou například

b) Root Mean Square Error (RMSE) - odmocnina čtverce chyb

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} \epsilon_t^2} = \sqrt{\frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} (\hat{\sigma}_t - \sigma_t)^2}, \quad (3.59)$$

c) Mean Absolute Error (MAE) - Průměr absolutních hodnot chyb

$$MAE = \frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} |\epsilon_t| = \frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} |\hat{\sigma}_t - \sigma_t|. \quad (3.60)$$

d) Bollerslev, Engle a Nelson (1994) doporučují ztrátovou funkci často používanou při odhadování modelů typu GARCH

$$GMLE = \frac{1}{T^*} \sum_{t=1}^{T^*} \left[ \ln(\hat{\sigma}_t) + \frac{\sigma_t}{\hat{\sigma}_t} \right]. \quad (3.61)$$

V praxi se může stát, že jedna použitá ztrátová funkce určí jako nejvhodnější jiný model než ta druhá. V takovém případě se potom využívá testů, které mají určit váhy jednotlivých ztrátových funkcí, a tím jejich výpovědní hodnotu. Patří sem asymptotický, znaménkový nebo Wilcoxonův test. Více Diebold, Mariano (2005).

## **4 Empirické odhady modelů volatility a její predikce**

Tato aplikačně-empirická kapitola tvoří hlavní část diplomové práce. Nejprve jsou charakterizovány vybrané indexy, jejichž časové řady jsou rozděleny do různě dlouhých tří testovacích období a poté statisticky analyzovány. Pro každou časovou řadu u obou indexů je odhadnut nejlepší lineární a nejlepší nelineární model, jejichž rezidua jsou následně otestována. Vývoj podmíněného rozptylu, jímž je volatilita vyjádřena, je pak pro každý model graficky zachycen a nejvýraznější výkyvy okomentovány. Na závěr je graficky srovnán skutečný a podle jednotlivých modelů odhadnutý podmíněný rozptyl, provedena predikce ex-post vybraných akciových indexů a posouzena její kvalita.

### **4.1 Základní charakteristika a vývoj vybraných akciových indexů**

V následující úvodní kapitole budou představeny a charakterizovány indexy vybrané pro účely této práce, tedy americký NASDAQ Composite a japonský Nikkei 225, včetně jejich historického vývoje. Tyto indexy byly vybrány, neboť se jedná o ukazatele nejvyspělejších světových ekonomik.

#### **4.1.1 NASDAQ Composite**

NASDAQ Composite (IXIC) je jedním z indexů největšího ryze elektronického burzovního trhu v USA s více jak 3900 kótovanými společnostmi z 39 zemí celého světa. Obchoduje se zde s akciemi, opcemi i futures. Tato burza funguje od roku 1971 a je třetí největší burzou na světě a druhou největší v USA.

IXIC byl zaveden krátce po založení burzy v roce 1971 a zahrnuje všechny akcie obchodované na The Nasdaq Stock Market, a to americké i neamerické. Je zaměřen především na technologické akcie, ale obsahuje rovněž i akcie firem z finančního, spotřebního nebo biotechnologického odvětví. Jeho výhodou široký záběr, nevýhodou zaměření na technologický sektor. V současnosti zahrnuje přes tři tisíce akciových titulů. Díky svému širokému záběru na největším akciovém trhu světa je IXIC jedním z nejvýznamnějších a nejsledovanějších akciových světových indexů vůbec.

Tento index je váženým indexem, což znamená, že váha jednotlivých komponentů je dána jejich tržní kapitalizací. Tento fakt lze považovat za výhodu, neboť větší společnosti pak mají logicky větší podíl na tržním indexu, který má v tomto důsledku větší výpovědní hodnotu.

Na grafu č. 4.1 je patrný celý vývoj finanční globální krize popsany v podkapitole 2.1.3, včetně období předcházejícího i následujícího. Po roce 2000 jsou zřejmé následky

prasknutí bubliny týkající se akcií internetových firem. Zajímavý je i propad v září 2011, který byl způsoben teroristickými útoky v New Yorku, a opětovný růst vlivem invaze do Afghánistánu. Důsledky expanzivní monetární politiky FEDu v podobě snížení úrokových sazeb jsou dobře patrné z pozitivního vývoje indexu od roku 2003 až do kulminace v roce 2008. Po následném prasknutí hypoteční bubliny se v roce 2009 dotknul index svého minima ve sledovaném období. Od tohoto okamžiku až do současnosti vykazuje rostoucí trend. K datu 3. 6. 2013 měl IXIC hodnotu 3 465,37 USD.

**Graf. č. 4.1: Vývoj NASDAQ Composite od roku 2000**



Zdroj: [www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com)

#### 4.1.2 Nikkei 225

Index Nikkei je indexem Tokijské burzy cenných papírů (TSE) založenou roku 1878. Název Nikkei vznikl podle japonských novin *Nihon Keizai Shimbun*, jimiž je publikován od roku 1950. Nikkei index je složen z akcií 225 nejvýznamnějších japonských společností, mezi které patří například Mitsubishi, Fujifilm Holdings, Fujitsu, Toshiba nebo West Japan Railways. Složení společností je každoročně aktualizováno. Báze indexu je obsahem přílohy č. 1.

Tento index je cenově váženým indexem, čímž se liší od většiny nejvýznamnějších současných indexů. Při jeho konstrukci jsou opomíjeny celkové tržní kapitalizace společností a vychází se pouze ze znalostí aktuálních cen jednotlivých akcií, což znamená, že čím vyšší bude cena akcií společnosti, tím vyšší váha jim bude přiřazena v indexu.

Z toho důvodu lze konstatovat, že po technické stránce se nemůže rovnat současným modernějším tržním indexům, ale podobně jako americký Dow Jones Index, který se počítá obdobně, si za léta publikování vybudoval jistou prestiž a patří k nejznámějším a nejcitovanějším indexům.



Na grafu č. 4.2 je znázorněn vývoj indexu Nikkei 225. I z jeho vývoje je jasné zřejmý vývoj globální finanční krize. Výrazný růst od počátku roku 2013 je především důsledkem zavedení nových reforem a expanzivní monetární politiky pod vedením nového premiéra. Tyto faktory vedly k vlně optimismu, která měla za následek účast dříve jinak konzervativních domácích investorů na rizikových aktivech. To se promítlo do růstu akciového trhu, který tak od začátku roku 2013 posílil přes 50 procent. Nelze opomenout také příliv zahraničních investorů, pro které se japonské akcie staly levnějšími díky slabému jenu. K datu 3. 6. 2013 měl index Nikkei 225 hodnotu 13 261,82 JPY.

**Graf č. 4.2: Vývoj Nikkei 225 od roku 2000**



Zdroj: [www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com)

## 4.2 Volba dat a jejich statistická analýza

V následující kapitole jsou časové řady obou indexů rozděleny do tří testovacích období, aby bylo možné zachytit vývoj volatility s ohledem na vývoj globální finanční krize. Následně jsou všechny tímto způsobem rozdělené časové řady výnosů podrobeny testu normality, stacionarity a heteroskedasticity, rovněž je vygenerován histogram rozdělení četností a zobrazeny deskriptivní statistiky.

### 4.2.1 Rozdělení testovacích období

Pro účely této práce a pro větší přehlednost bylo celé základní sledované období, které trvá od 1. ledna 2004 do 8. března 2012, rozděleno na tři různě dlouhá testovací období, aby bylo možné zachytit stav před, po a v průběhu samotné globální finanční krize. Pracuje se s denními uzavíracími kurzy zvolených indexů. Testovací období byla rozdělena následovně:

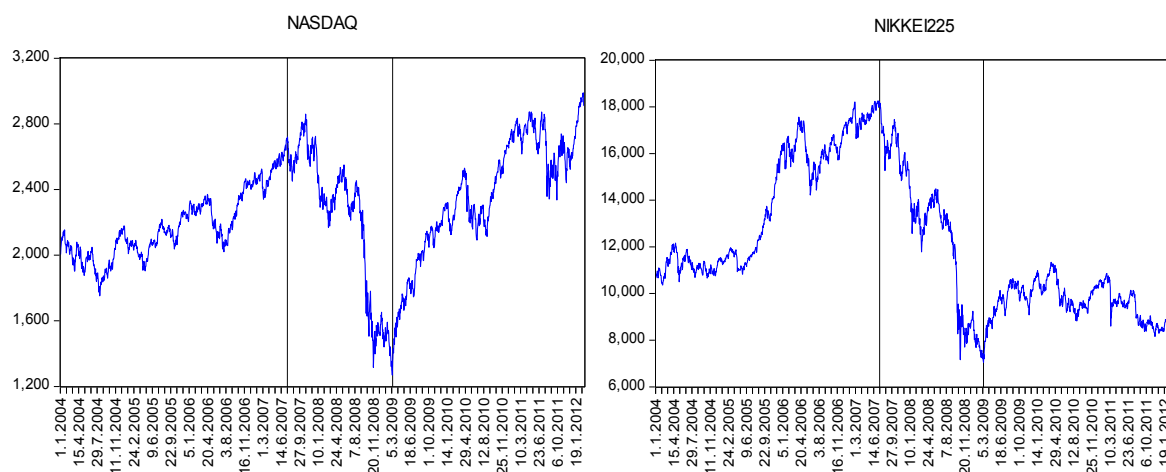
- První období začíná 1. ledna 2004 a charakterizuje vývoj před krizí. Pro vývoj indexů v tomto období je typický výrazný vzestup. Konec byl stanoven

na 16. července 2007, neboť zhruba v tomto období dosahují indexy svých nejvyšších hodnot.

- Na začátku druhého období se ještě hodnoty indexů dokázaly přiblížit svým maximům, nicméně celé druhé období, které navazuje bezprostředně na první, je charakterizováno velmi prudkým poklesem vrcholícím datem 6. března 2009, kdy se hodnoty indexů dostaly na své minimum. Za takto razantním pádem stojí především splasknutí hypoteční bubliny v USA, které je popsáno v kapitole 2.1.3.
- Poslední období trvá od konce předcházejícího do 8. března 2012, tedy až do konce celého sledovaného období. Po dosažení dna, kam se dostala nejen americká ekonomika, se svět vzpamatovává z finanční krize a i hodnoty akciových indexů začínají po odrazu ze dna opět růst a vykazovat pozitivní trend.

V tabulkách, grafech a obrázcích je takové období označeno vždy podtržitkem a příslušným číslem za originálním názvem indexu.

**Graf č. 4.3: Členění sledovaného období**



Jak je patrné z grafu č. 4.3, oba akciové indexy vykazují vývojový trend, takovou časovou řadu pak lze označit za nestacionární.

#### 4.2.2 Definice výnosu

Protože není v rámci regresní analýzy možné pracovat s nestacionárními daty, je třeba stacionaritu eliminovat a stávající data transformovat do stacionární časové řady. Při takovém procesu se namísto užívání historických cen akcií začne počítat s jejich výnosem. Nejprve je třeba vysvětlit pojem martingál, který je spojován s hypotézou efektivního trhu a předpokládá, že nepřekrývající se cenové změny ve všech časových posunech jsou lineárně nezávislé, tedy nekorelované. Martingál je možné vyjádřit vztahem

$$P_t = P_{t-1} + \alpha_t, \quad (4.1)$$

kde  $\alpha_t$  je přírůstek (diference) martiginálu. Lze vycházet z předpokladu, že rozdělení náhodných veličin je normální, tj.  $\alpha_t \sim N(0, \sigma_a^2)$ . Přestože takový předpoklad vychází z logické úvahy, má závažný nedostatek. Cena aktiva totiž nemůže být záporná, potom je inimální dosažitelný jednoduchý výnos aktiva

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = -1. \quad (4.2)$$

Protože náhodná veličina, která má normální rozdělení, může nabývat jakéhokoliv reálného čísla, pro cenu aktiva (4.2) platí, že jeho dolní mez není garantována. Tento problém lze vyřešit úvahou, že jednoduché výnosy aktiva

$$R_t + 1 = \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (4.3)$$

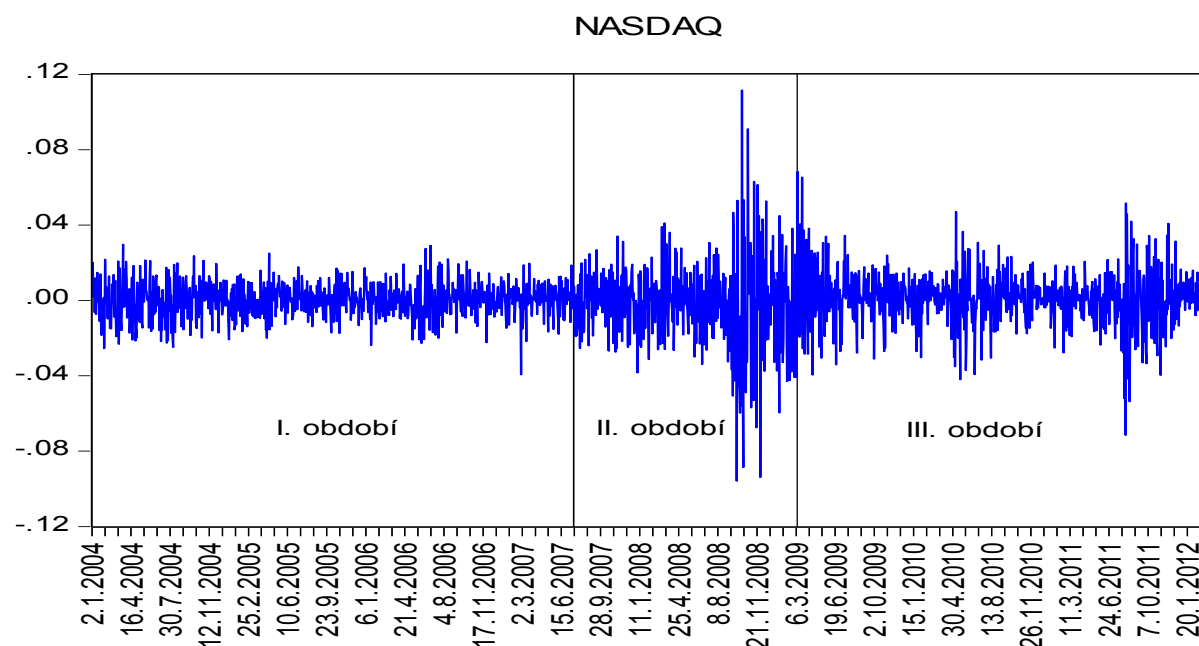
by měly mít rozdělení nezáporné náhodné veličiny. V tomto případě se nabízí logaritmicko – normální rozdělení, protože logaritmus náhodné veličiny s logaritmicko – normálním rozdělením má normální rozdělení. Pokud má jednoduchý výnos  $R_t + 1$  takové rozdělení, pak jeho logaritmus

$$r_t = \ln(R_t + 1) = \ln P_t - \ln P_{t-1} = p_t - p_{t-1} \quad (4.4)$$

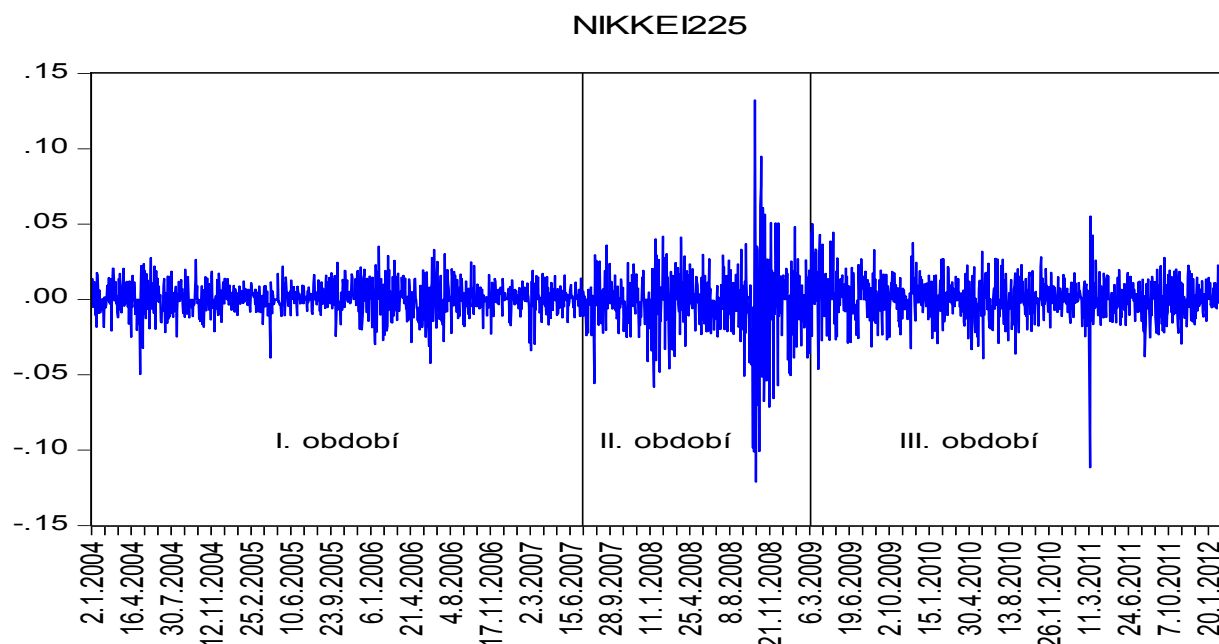
má normální rozdělení. Více se touto problematikou zabývá Arlt, Arltová (2003)

Po použití logaritmicko – normálního rozdělení u výnosů lze na základě grafu č. 4.4 a č. 4.5 konstatovat, že problém nestacionarity byl vyřešen, neboť ani u jednoho z indexů již nejsou patrné vývojové trendy. Toto tvrzení je však dále nutné ověřit ještě početně ADF testem.

**Graf č. 4.4: Znázornění výnosů indexu NASDAQ Composite**



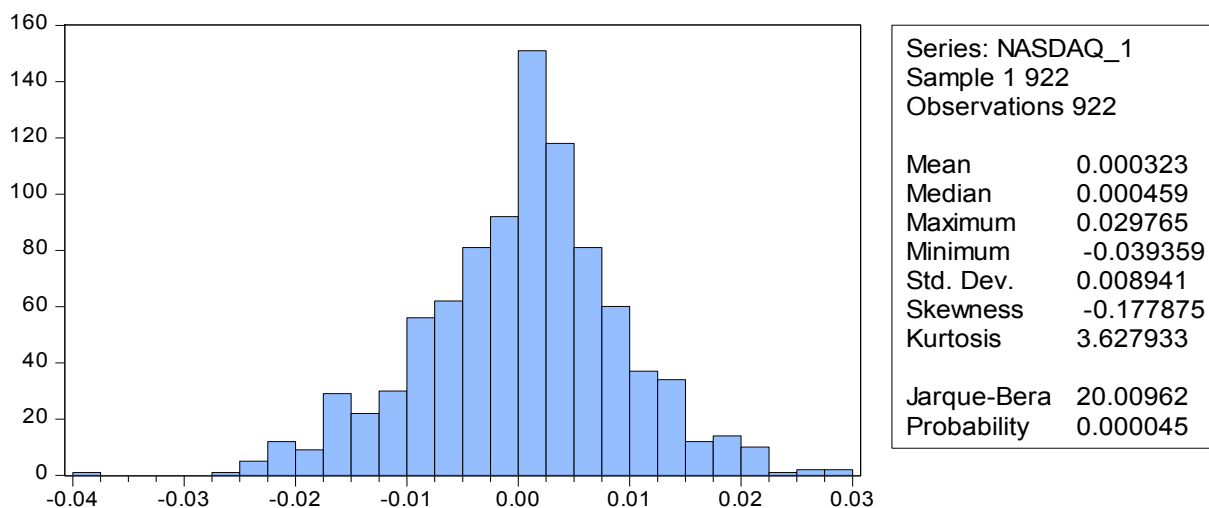
**Graf č. 4.5: Znázornění výnosů indexu NIKKEI225**



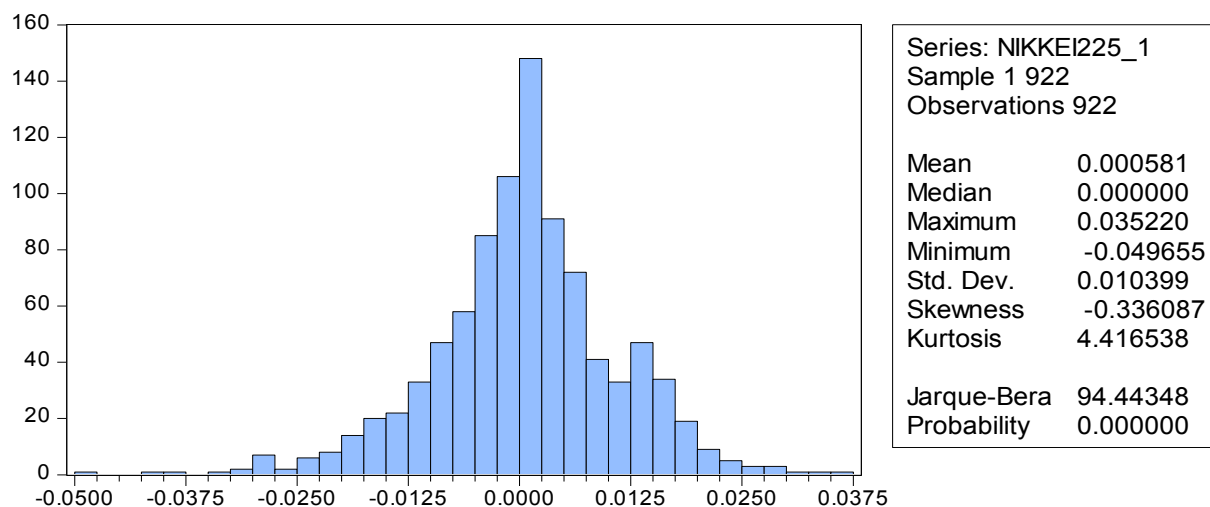
#### 4.2.3 Deskriptivní statistika a test normality

Deskriptivní statistiky slouží k zachycení nejdůležitějších hodnot sledovaného vzorku dat. Generování hodnot deskriptivní statistiky bylo provedeno v programu EViews, kde jsou v tabulce zobrazovány vždy hodnoty průměru, mediánu, maxima a minima, směrodatné odchylky, šikmosti, špičatosti a také Jarque-Bera statistiky, která slouží k testování normality časové řady výnosů (viz 3.4.4). Tabulka deskriptivní statistiky je v prostředí programu EViews součástí histogramu rozdělení četností, který je uveden vždy na levé straně.

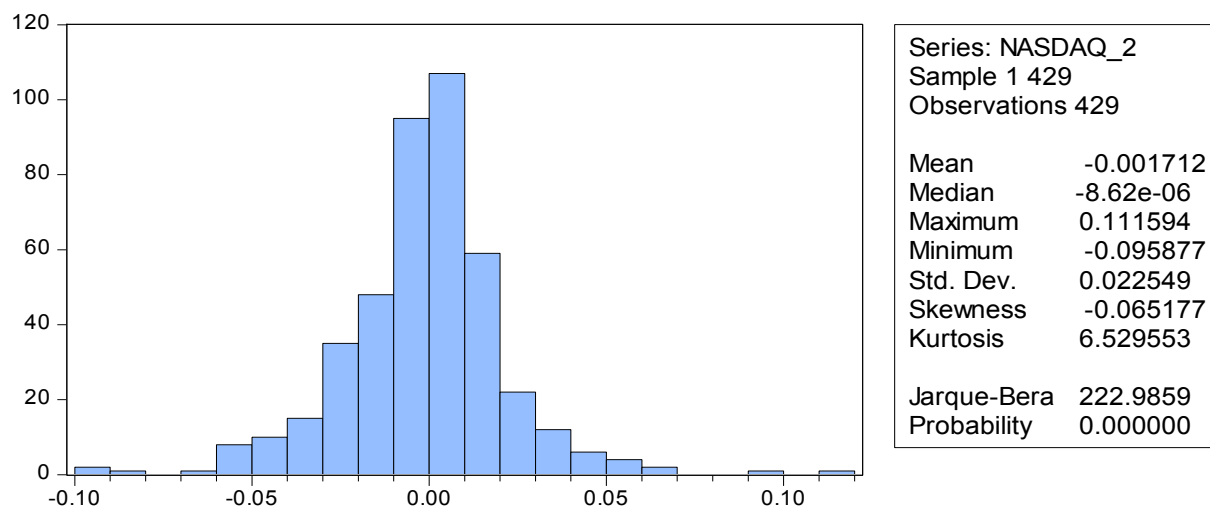
**Obr. č. 4.1: Histogram rozdělení četností a deskriptivní statistika pro NASDAQ\_1**



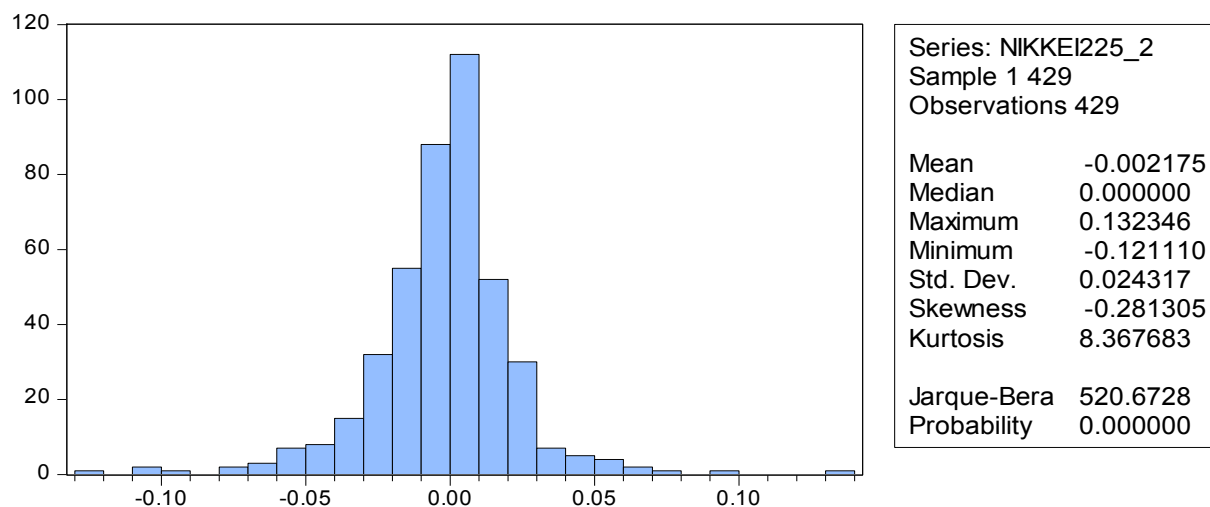
**Obr. č. 4.2: Histogram rozdělení četností a deskriptivní statistika pro NIKKEI225\_1**



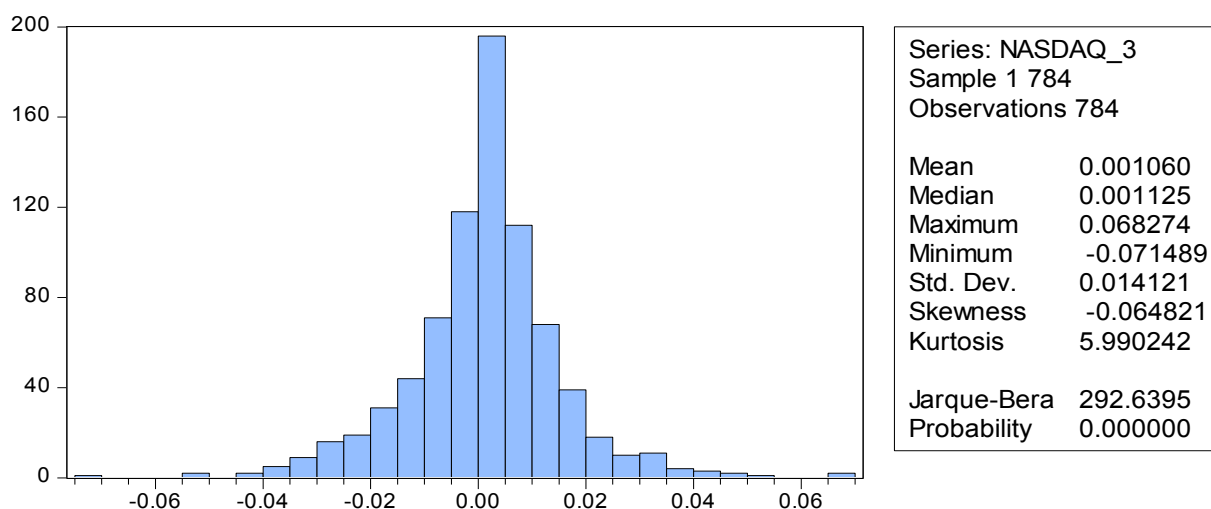
**Obr. č. 4.3: Histogram rozdělení četností a deskriptivní statistika pro NASDAQ\_2**



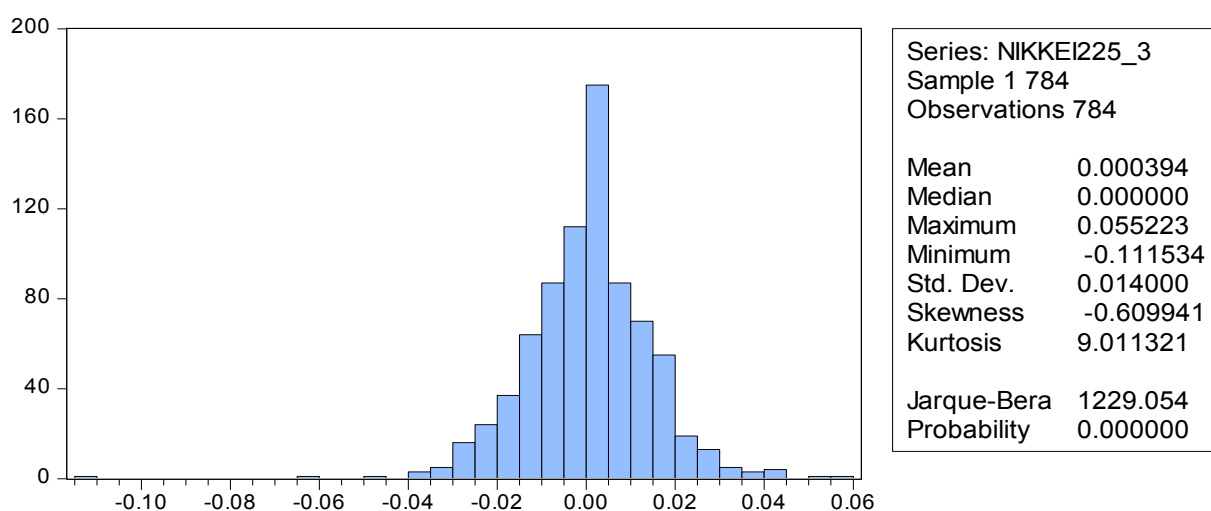
**Obr. č. 4.4: Histogram rozdělení četností a deskriptivní statistika pro NIKKEI225\_2**



**Obr. č. 4.5: Histogram rozdělení četností a deskriptivní statistika pro NASDAQ\_3**



**Obr. č. 4.6: Histogram rozdělení četností a deskriptivní statistika pro NIKKEI225\_3**



U všech výše uvedených obrázků bude věnována pozornost především hodnotě střední hodnoty (mean), směrodatné odchylky (Std. Dev.), šikmosti (Skewness), špičatosti (Kurtosis), Jarque-Bera statistiky a její pravděpodobnosti.

Obecně platí, že pokud je střední hodnota kladné číslo, potom je průměrný denní výnos kladný, a dochází tak v průměru ke zhodnocování investovaných prostředků. Kladné hodnoty nabývá u obou indexů v prvním a třetím období. Záporná je ve druhém období, kdy investoři většinou dosahovali ztrát.

Při pohledu na hodnoty směrodatné odchylky je zřejmé, že nejrizikovějším obdobím u obou indexů bylo opět období druhé, neboť právě zde dosahují nejvyšších hodnot. Naopak nejméně rizikovým obdobím bylo pro investory období první.

Šikmost je v případě normálního rozdělení rovna nule. Ve všech sledovaných případech její hodnota vyšla záporně, což ukazuje na zešikmení doprava a vylučuje normální rozdělení.

Špičatost je v případě normálního rozdělení rovna hodnotě 3. Jak je uvedeno v kapitole 2.2.1, pro finanční časové řady jsou charakteristické vyšší hodnoty špičatosti, což ve všech sledovaných obdobích u obou indexů platí. Potom lze konstatovat, že zde není normální rozdělení.

Na základě tvaru histogramů četností i výsledných hodnot šikmosti a špičatosti lze usoudit, že časové řady vybraných indexů nemají normální rozdělení. Tuto skutečnost je však třeba ještě ověřit testem normality. Pro tuto práci byl zvolen Jarque-Bera test popsáný v kapitole č. 3.4.4, jehož posuzované hodnoty jsou v tabulce deskriptivní statistiky uvedeny na posledních dvou řádcích. Na základě těchto hodnot lze u všech případů zamítnout nulovou hypotézu, a vyloučit tak normální rozdělení sledovaných časových řad.

#### 4.2.4 Test stacionarity výnosů

Pro testování stacionarity vybraných časových řad byl vybrán rozšířený Dickey-Fuller test jednotkovosti kořene, který je vysvětlen v podkapitole 2.3.3. Nulová hypotéza znamená existenci jednotkového kořene, tedy stacionaritu časové řady. Test byl proveden v programu Eviews, výsledky jsou zaznamenány v tabulce č. 4.1.

**Tab. č. 4.1: ADF test jednotkovosti kořene**

	Hodnota ADF testu	P-st	Kritická hodnota na hladině významnosti		
			1%	5%	10%
NASDAQ_1	-29,82091	0,00000	-3,437228	-2,864466	-2,568381
NIKKEI225_1	-30,92342	0,00000			
NASDAQ_2	-23,98546	0,00000			
NIKKEI225_2	-16,54365	0,00000			
NASDAQ_3	-29,73631	0,00000			
NIKKEI225_3	-28,36308	0,00000			

Protože jsou hodnoty ADF testu statisticky významné ve všech případech a jsou menší než kritické hodnoty na hladině významnosti 1 %, 5 % i 10 %, je přijata nulová hypotéza, která znamená, že všechny časové řady jsou stacionární.

#### 4.2.5 Test heteroskedasticity výnosů

Nejprve je třeba sestavit regresní model a získat rezidua, která se následně testují na přítomnost heteroskedasticity pomocí ARCH – LM testu popsáného v kapitole 3.4.4., přičemž za závisle proměnnou je považován čtverec reziduí a za nezávislé proměnné

zpožděné čtverce reziduí (zde o 4 dny) a konstanta. Nulová hypotéza představuje homoskedasticitu, alternativní hypotéza heteroskedasticitu.

**Tab. č. 4.2: ARCH-LM test heteroskedasticity výnosů**

	RESID <sup>2</sup> (-1)	P-st	RESID <sup>2</sup> (-2)	P-st	RESID <sup>2</sup> (-3)	P-st	RESID <sup>2</sup> (-4)	P-st
NASDAQ_1	-0,6812	0,4959	2,3443	<b>0,0193*</b>	0,9780	0,3283	1,5670	0,1175
NIKKEI225_1	0,0143	0,9886	3,1454	<b>0,0017*</b>	5,6124	<b>0,0000*</b>	3,0445	<b>0,0024*</b>
NASDAQ_2	2,0763	<b>0,0385*</b>	4,7003	<b>0,0000*</b>	1,5751	0,1160	1,7751	0,0766
NIKKEI225_2	-0,5315	0,5953	10,4210	<b>0,0000*</b>	1,9260	0,0548	3,9203	<b>0,0001*</b>
NASDAQ_3	1,8550	0,0640	5,9708	<b>0,0000*</b>	4,6859	<b>0,0000*</b>	2,0312	<b>0,0425*</b>
NIKKEI225_3	10,3692	<b>0,0000*</b>	-0,5745	0,5658	-0,1694	0,8656	0,5682	0,5781

Tabulka č. 4.2 obsahuje výsledky vygenerované programem Eviews. Tučné údaje s hvězdičkou označují zpožděné hodnoty čtverců reziduí, jejichž statistická významnost nepřekračuje 5 %, a jsou tak považovány za heteroskedastické.

Jak je z jednotlivých hodnot patrné, neexistuje jediná časová řada, v jejímž případě by byla přijata nulová hypotéza, tedy byla konstatována homoskedasticita.

Právě díky přítomnosti heteroskedasticity ve všech časových řadách je vhodné použít pro modelování a analýzu volatility modelů podmíněné heteroskedasticity, jež jsou popsány v kapitole 3.

### 4.3 Odhad lineárních a nelineárních modelů volatility

Pro odhad lineárních a nelineárních modelů volatility bylo opět využito programu Eviews, přičemž se vychází z teoretických kapitol 3.2, 3.3 a 3.4. Pro každou časovou řadu bude vybrán nejlepší odhad. Posuzovat se bude především významnost jednotlivých parametrů. Pokud dojde k situaci, že budou modely z hlediska parametrů stejně kvalitní, porovnají se hodnoty Akaikeho a Schwarzova informačního kritéria popsaných v podkapitole 3.4.4.

Nejprve se odhadne regresní rovnice, kde závislou proměnnou je daná časová řada a nezávislou konstanta a zpožděná časová řada o jedno období. V případě, že bude nezávislá proměnná nevýznamná, vyloučí se z modelu. Při odhadování modelů je použito obecné rozdělení chyb (GED).

Výsledné modely jsou seřazeny podle zemí a jednotlivých období.



### 4.3.1 USA

V následující podkapitole je modelována volatilita časové řady indexu NASDAQ Composite. Pro každé období je odhadnut lineární a nelineární model, přičemž období jsou značena originálním názvem, podtržítkem a příslušnou číselnou hodnotou 1 až 3, jak bylo zmíněno již na začátku této kapitoly.

#### a) 1. období

V prvním období se jeví jako nejlepší lineární model GARCH(1,2) uvedený v tabulce č. 4.3 vlevo, jako nelineární potom EGARCH(0,1). V obou případech jsou všechny parametry statisticky významné.

**Tab. č. 4.3: Model GARCH(1,2) a EGARCH(0,1) pro NASDAQ\_1**

GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1) + C(5)*GARCH(-2)					LOG(GARCH) = C(2) + C(3)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(4)*LOG(GARCH(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.	Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000549	0.000267	2.057874	0.0396	C	0.000377	0.000266	1.418838	0.1559
Variance Equation					Variance Equation				
C	6.52E-07	2.46E-07	2.653458	0.0080	C(2)	-0.112143	0.038116	-2.942157	0.0033
RESID(-1)^2	0.009692	0.004000	2.423197	0.0154	C(3)	-0.072568	0.012755	-5.689247	0.0000
GARCH(-1)	1.860256	0.053989	34.45612	0.0000	C(4)	0.988444	0.004063	243.2798	0.0000
GARCH(-2)	-0.877934	0.050533	-17.37341	0.0000					
GED PARAMETER	1.456708	0.096095	15.15911	0.0000	GED PARAMETER	1.526098	0.093278	16.36073	0.0000
R-squared	-0.000645	Mean dependent var	0.000323		R-squared	-0.000038	Mean dependent var	0.000323	
Adjusted R-squared	-0.000645	S.D. dependent var	0.008941		Adjusted R-squared	-0.000038	S.D. dependent var	0.008941	
S.E. of regression	0.008944	Akaike info criterion	-6.643830		S.E. of regression	0.008942	Akaike info criterion	-6.672036	
Sum squared resid	0.073682	Schwarz criterion	-6.612420		Sum squared resid	0.073637	Schwarz criterion	-6.645862	
Log likelihood	3068.805	Hannan-Quinn criter.	-6.631845		Log likelihood	3080.809	Hannan-Quinn criter.	-6.662049	
Durbin-Watson stat	1.965829				Durbin-Watson stat	1.967022			

#### b) 2. období

V druhém období byl pro časovou řadu NASDAQ\_2 vybrán jako optimální lineární model IGARCH(1,2), jako optimální nelineární EGARCH(2,2). Stejně jako v prvním období lze konstatovat, že u obou modelů jsou všechny parametry statisticky významné. Podrobné údaje jsou zaznamenány v tabulce č. 4.4.

**Tab. č. 4.4: Model IGARCH(1,2) a EGARCH(2,2) pro NASDAQ\_2**

$\text{GARCH} = C(2) * \text{RESID}(-1)^2 + C(3) * \text{GARCH}(-1) + (1 - C(2) - C(3)) * \text{GARCH}(-2)$					$\text{LOG}(\text{GARCH}) = C(2) + C(3) * \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)}) + C(4) * \text{ABS}(\text{RESID}(-2) / \sqrt{\text{GARCH}(-2)}) + C(5) * \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + C(6) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-1)) + C(7) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-2))$				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.	Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
NASDAQ_2(-1)	-0.138824	0.043793	-3.169974	0.0015	NASDAQ_2(-1)	-0.152054	0.042276	-3.596678	0.0003
Variance Equation					Variance Equation				
RESID(-1)^2	0.040304	0.019809	2.034636	0.0419	C(2)	-0.219653	0.068749	-3.194990	0.0014
GARCH(-1)	1.623496	0.182746	8.883905	0.0000	C(3)	-0.194284	0.075076	-2.587846	0.0097
GARCH(-2)	-0.663800	0.164283	-4.040599	0.0001	C(4)	0.283495	0.086863	3.263684	0.0011
GED PARAMETER	1.716518	0.169955	10.09986	0.0000	C(5)	-0.064775	0.026342	-2.459035	0.0139
R-squared	0.014498	Mean dependent var	-0.001729		C(6)	1.529828	0.156662	9.765136	0.0000
Adjusted R-squared	0.014498	S.D. dependent var	0.022573		C(7)	-0.547925	0.152779	-3.586383	0.0003
S.E. of regression	0.022409	Akaike info criterion	-5.118331		GED PARAMETER	2.010056	0.277344	7.247531	0.0000
Sum squared resid	0.214416	Schwarz criterion	-5.080395		R-squared	0.014417	Mean dependent var	-0.001729	
Log likelihood	1099.323	Hannan-Quinn criter.	-5.103348		Adjusted R-squared	0.014417	S.D. dependent var	0.022573	
Durbin-Watson stat	2.035330				S.E. of regression	0.022410	Akaike info criterion	-5.166246	
					Sum squared resid	0.214434	Schwarz criterion	-5.090375	
					Log likelihood	1113.577	Hannan-Quinn criter.	-5.136281	
					Durbin-Watson stat	2.011608			

### c) 3. období

V posledním období se pro časovou řadu NASDAQ\_3 jeví jako nejlepší lineární model GARCH(1,1), jehož parametry jsou uvedeny v tabulce 4.5 vlevo. Jako nejvhodnější nelineární model byl vybrán EGARCH(2,1).

**Tab. č. 4.5: Model GARCH(1,1) a EGARCH(2,1) pro NASDAQ\_3**

$\text{GARCH} = C(2) + C(3) * \text{RESID}(-1)^2 + C(4) * \text{GARCH}(-1)$					$\text{LOG}(\text{GARCH}) = C(2) + C(3) * \text{ABS}(\text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)}) + C(4) * \text{ABS}(\text{RESID}(-2) / \sqrt{\text{GARCH}(-2)}) + C(5) * \text{RESID}(-1) / \sqrt{\text{GARCH}(-1)} + C(6) * \text{LOG}(\text{GARCH}(-1))$				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.	Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.001448	0.000346	4.184813	0.0000	C	0.000941	0.000337	2.791435	0.0052
Variance Equation					Variance Equation				
C	3.45E-06	1.72E-06	1.998959	0.0456	C(2)	-0.553584	0.114346	-4.841315	0.0000
RESID(-1)^2	0.093723	0.024674	3.798460	0.0001	C(3)	-0.200767	0.095857	-2.094454	0.0362
GARCH(-1)	0.886095	0.027371	32.37348	0.0000	C(4)	0.361358	0.104439	3.460001	0.0005
GED PARAMETER	1.216312	0.094908	12.81573	0.0000	C(5)	-0.193528	0.029863	-6.480441	0.0000
R-squared	-0.000755	Mean dependent var	0.001060		C(6)	0.951914	0.010827	87.91922	0.0000
Adjusted R-squared	-0.000755	S.D. dependent var	0.014121		GED PARAMETER	1.348603	0.110075	12.25166	0.0000
S.E. of regression	0.014127	Akaike info criterion	-5.989584		R-squared	-0.000071	Mean dependent var	0.001060	
Sum squared resid	0.156258	Schwarz criterion	-5.959836		Adjusted R-squared	-0.000071	S.D. dependent var	0.014121	
Log likelihood	2352.917	Hannan-Quinn criter.	-5.978145		S.E. of regression	0.014122	Akaike info criterion	-6.038223	
Durbin-Watson stat	2.116805				Sum squared resid	0.156152	Schwarz criterion	-5.996576	
					Log likelihood	2373.983	Hannan-Quinn criter.	-6.022209	
					Durbin-Watson stat	2.118253			

## 4.3.2 Japonsko

V této kapitole jsou zobrazeny nejlepší odhadnuté modely pro časovou řadu indexu Nikkei 225, číslování je obdobné jako u předchozího indexu.

### a) 1. období

V prvním období se zdá pro časovou řadu NIKKEI225\_1 nejlepším možným lineárním modelem IGARCH(1,1), jako optimální nelineární model byl zvolen CGARCH(1,1). Parametry obou modelů jsou zaznamenány v tabulce č. 4.6. Jak je vidět, všechny parametry

jsou u obou modelů významné až na konstantu u lineárního modelu, jejíž hodnota ve sloupci Prob. překročila hranici 5 %.

**Tab. č. 4.6: Model IGARCH(1,1) a CGARCH(1,1) pro NIKKEI225\_1**

GARCH = C(2)*RESID(-1)^2 + (1 - C(2))*GARCH(-1)					Q = C(2) + C(3)*(Q(-1) - C(2)) + C(4)*(RESID(-1)^2 - GARCH(-1)) GARCH = Q + (C(5) + C(6)*(RESID(-1)<0))*(RESID(-1)^2 - Q(-1)) + C(7)* (GARCH(-1) - Q(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.	Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000469	0.000255	1.839022	0.0659	C	0.000521	3.65E-05	14.27025	0.0000
Variance Equation					Variance Equation				
RESID(-1)^2	0.055412	0.011159	4.965831	0.0000	C(2)	9.91E-05	2.34E-05	4.229189	0.0000
GARCH(-1)	0.944588	0.011159	84.65066	0.0000	C(3)	0.978576	0.013435	72.83914	0.0000
GED PARAMETER	1.300947	0.072317	17.98950	0.0000	C(4)	0.064244	0.021359	3.007768	0.0026
R-squared	-0.000115	Mean dependent var	0.000581		C(5)	-0.170165	0.020007	-8.505144	0.0000
Adjusted R-squared	-0.000115	S.D. dependent var	0.010399		C(6)	0.212169	0.040669	5.216991	0.0000
S.E. of regression	0.010400	Akaike info criterion	-6.416115		C(7)	0.735335	0.125717	5.849111	0.0000
Sum squared resid	0.099616	Schwarz criterion	-6.400410		GED PARAMETER	1.375205	0.086970	15.81237	0.0000
Log likelihood	2960.829	Hannan-Quinn criter.	-6.410123		R-squared	-0.000033	Mean dependent var	0.000581	
Durbin-Watson stat	2.039496				Adjusted R-squared	-0.000033	S.D. dependent var	0.010399	
					S.E. of regression	0.010400	Akaike info criterion	-6.431974	
					Sum squared resid	0.099608	Schwarz criterion	-6.390095	
					Log likelihood	2973.140	Hannan-Quinn criter.	-6.415994	
					Durbin-Watson stat	2.039662			

## b) 2. období

Ve druhém období se jako nejvhodnější lineární model jeví GARCH(2,1), jehož rovnice byla rozšířena zpožděnými rezidui o dvě období. V případě nelineárního modelu je pak nejvhodnějším modelem CGARCH (1,1), u něhož jsou všechny parametry kromě konstanty významné. Informace k modelům jsou uvedeny v tabulce č. 4.7.

**Tab. č. 4.7: Model GARCH(2,1) a CGARCH(1,1) pro NIKKEI225\_2**

GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*RESID(-2)^2 + C(5)*GARCH(-1) + C(6)*RESID(-2)					Q = C(2) + C(3)*(Q(-1) - C(2)) + C(4)*(RESID(-1)^2 - GARCH(-1)) GARCH = Q + (C(5) + C(6)*(RESID(-1)<0))*(RESID(-1)^2 - Q(-1)) + C(7)* (GARCH(-1) - Q(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.	Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.002111	0.000781	-2.703672	0.0069	C	-0.000666	0.000768	-0.867053	0.3859
Variance Equation					Variance Equation				
C	1.97E-05	4.24E-06	4.643098	0.0000	C(2)	0.000506	0.000241	2.099545	0.0358
RESID(-1)^2	-0.110948	0.018158	-6.110324	0.0000	C(3)	0.940150	0.044184	21.27830	0.0000
RESID(-2)^2	0.160750	0.026457	6.075807	0.0000	C(4)	0.213092	0.053223	4.003786	0.0001
GARCH(-1)	0.907891	0.019182	47.32963	0.0000	C(5)	-0.380320	0.041339	-9.200112	0.0000
RESID(-2)	-0.004030	0.000598	-6.735485	0.0000	C(6)	0.192235	0.084652	2.270894	0.0232
GED PARAMETER	1.607629	0.183631	8.754665	0.0000	C(7)	0.602997	0.229767	2.624383	0.0087
R-squared	-0.000003	Mean dependent var	-0.002157		GED PARAMETER	1.366212	0.141482	9.656461	0.0000
Adjusted R-squared	-0.000003	S.D. dependent var	0.024370		R-squared	-0.003863	Mean dependent var	-0.002175	
S.E. of regression	0.024370	Akaike info criterion	-5.066915		Adjusted R-squared	-0.003863	S.D. dependent var	0.024317	
Sum squared resid	0.253000	Schwarz criterion	-5.000410		S.E. of regression	0.024364	Akaike info criterion	-5.062540	
Log likelihood	1088.786	Hannan-Quinn criter.	-5.040647		Sum squared resid	0.254058	Schwarz criterion	-4.986802	
Durbin-Watson stat	2.020640				Log likelihood	1093.915	Hannan-Quinn criter.	-5.032631	
					Durbin-Watson stat	2.013714			

## c) 3. období

Časová řada NIKKEI225\_3 je nejlépe popsána v lineárním modelu GARCH(1,1), nejlepším nelineárním modelem je EGARCH(1,1). Parametry jednotlivých modelů zachycuje tabulka č. 4.8. Ani v tomto období se nepodařilo najít takový model, u něhož by byla konstanta statisticky významná.

**Tab. č. 4.8: Model GARCH(1,1) a EGARCH(1,1) pro NIKKEI225\_3**

GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)					LOG(GARCH) = C(2) + C(3)*ABS(RESID(-1))/SQRT(GARCH(-1))) + C(4)*RESID(-1)/SQRT(GARCH(-1)) + C(5)*LOG(GARCH(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.	Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000495	0.000411	1.205248	0.2281	C	0.000253	0.000403	0.628151	0.5299
Variance Equation					Variance Equation				
C	1.30E-05	5.83E-06	2.231627	0.0256	C(2)	-0.622097	0.188898	-3.293301	0.0010
RESID(-1)^2	0.108176	0.027349	3.955396	0.0001	C(3)	0.146560	0.044470	3.295707	0.0010
GARCH(-1)	0.820405	0.048329	16.97553	0.0000	C(4)	-0.127815	0.023196	-5.510269	0.0000
					C(5)	0.941549	0.020009	47.05668	0.0000
GED PARAMETER	1.357701	0.097706	13.89581	0.0000	GED PARAMETER	1.387134	0.101478	13.66930	0.0000
R-squared	-0.000053	Mean dependent var	0.000394		R-squared	-0.000101	Mean dependent var	0.000394	
Adjusted R-squared	-0.000053	S.D. dependent var	0.014000		Adjusted R-squared	-0.000101	S.D. dependent var	0.014000	
S.E. of regression	0.014000	Akaike info criterion	-5.859358		S.E. of regression	0.014000	Akaike info criterion	-5.875957	
Sum squared resid	0.153467	Schwarz criterion	-5.829611		Sum squared resid	0.153475	Schwarz criterion	-5.840260	
Log likelihood	2301.869	Hannan-Quinn criter.	-5.847920		Log likelihood	2309.375	Hannan-Quinn criter.	-5.862231	
Durbin-Watson stat	2.027353				Durbin-Watson stat	2.027254			

#### 4.4 Testování reziduí odhadnutých modelů

Odhadnuté lineární a nelineární modely z předchozí kapitoly, resp. jejich standardizovaná rezidua je třeba podrobit diagnostické kontrole, která byla popsána v podkapitole 3.4.4. Podobně jako u jednotlivých časových řad bude testována normalita, autokorelace a hetroskedasticita. Pakliže má model splňovat vhodné podmínky, měla by být jeho standardizovaná rezidua homoskedastická a neautokorelovaná. Členění jednotlivých podkapitol je stejné jako u kapitoly 4.3, tedy podle zemí a následně podle období.

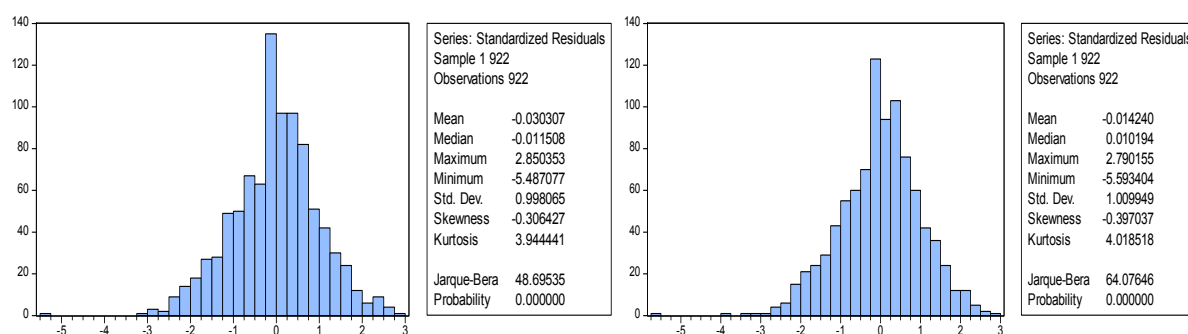
##### 4.4.1 Test normality

Test normality bude proveden opět formou Jarque-Bera testu. Na rozdíl od podkapitoly 4.2.3 jsou zde grafické výstupy uspořádány úsporněji hned vedle sebe, přičemž nalevo je test lineárního modelu, vpravo nelineárního.

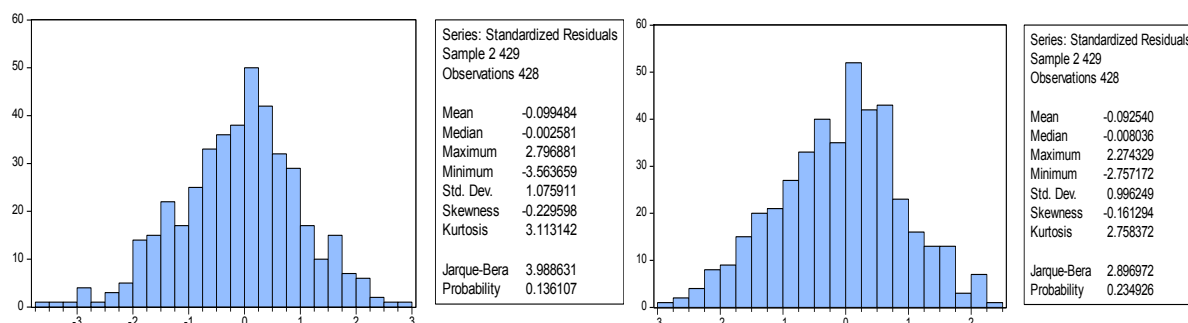
##### a) USA

Na obrázcích č. 4.8 až 4.10 jsou zobrazeny histogramy rozdělení a deskriptivní statistiky pro lineární a nelineární modely indexu NASDAQ Composite ve všech třech obdobích. V prvním a třetím období je na hladině významnosti 5 % zamítnuta nulová hypotéza, což znamená, že v tomto období je normální rozdělení vyloučeno. Naopak v druhém období platí s ohledem na hodnoty pravděpodobnosti Jarque-Bera statistiky, že v případě lineárního i nelineárního modelu jsou standardizovaná rezidua normálně rozdělena.

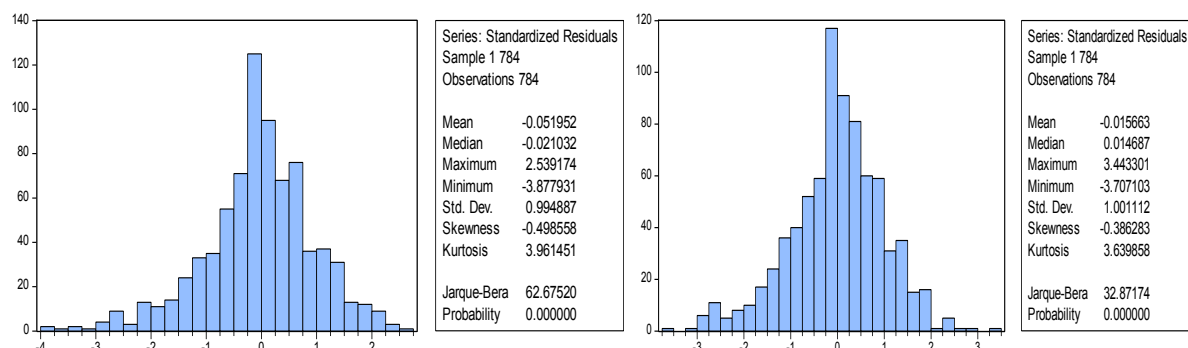
**Obr. č. 4.8: Histogram reziduí řady NASDAQ\_1 pro GARCH(1,2) a EGARCH(0,1)**



**Obr. č. 4.9: Histogram reziduí řady NASDAQ\_2 pro IGARCH(1,2) a GARCH(2,2)**



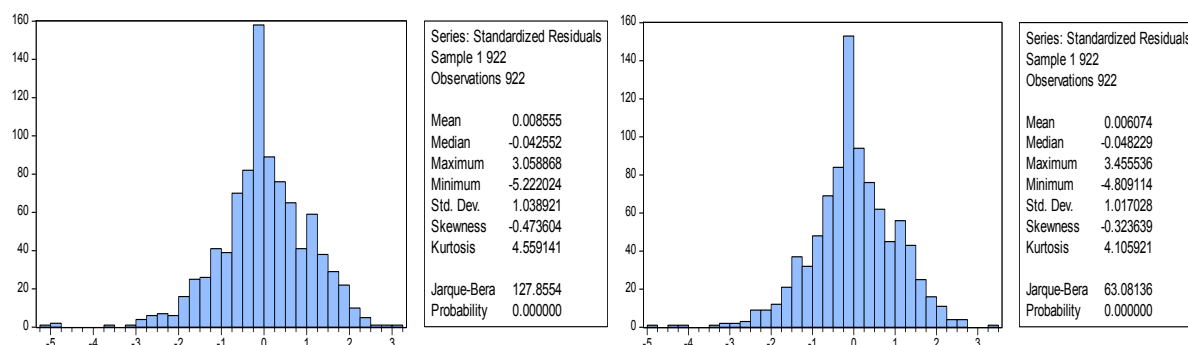
**Obr. č. 4.10: Histogram reziduí řady NASDAQ\_3 pro GARCH(1,1) a EGARCH(2,1)**



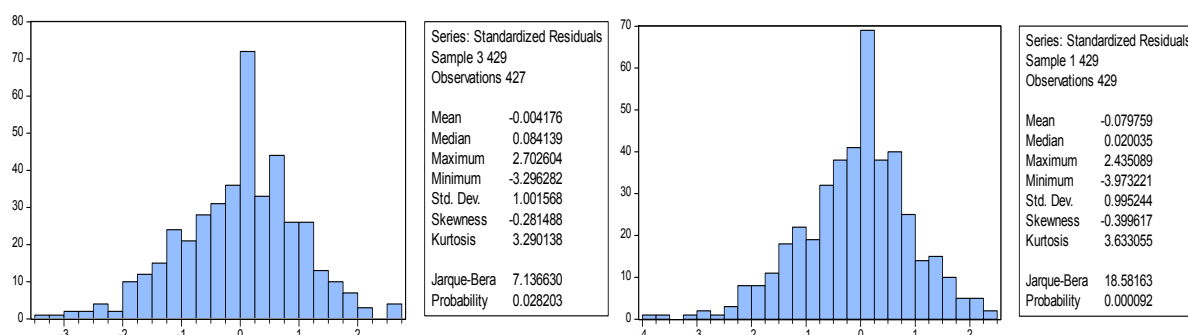
## b) Japonsko

V případě japonského indexu Nikkei 225 lze na základě obrázků č. 4.11 až 4.13 přijmout alternativní hypotézu, a zamítnout tak normální rozdělení u všech modelů ve všech třech obdobích. Nicméně stejně jako u amerického indexu si i zde lze všimnout, že ve druhém období, přestože není překročena hladina významnosti 5 %, hodnota pravděpodobnosti není nulová, jako je tomu u zbývajících dvou.

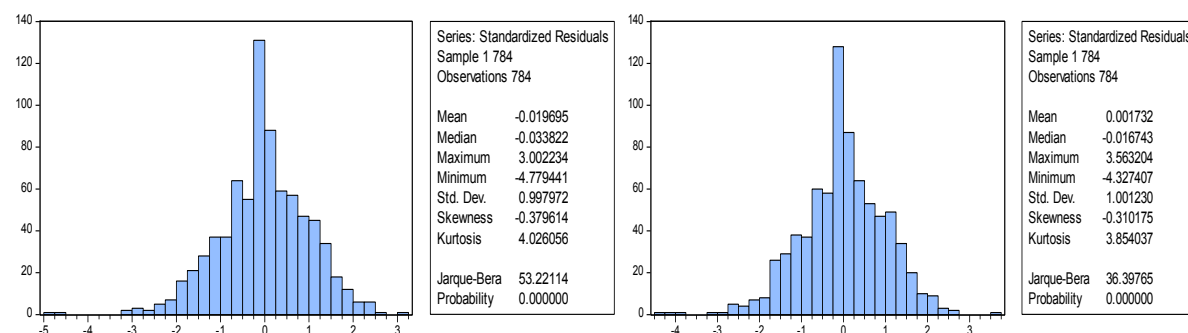
**Obr. č. 4.11: Histogram reziduí řady NIKKEI225\_1 pro IGARCH(1,1) a CGARCH(1,1)**



**Obr. č. 4.12: Histogram reziduí řady NIKKEI225\_2 pro GARCH(2,1) a CGARCH(1,1)**



**Obr. č. 4.13: Histogram reziduí řady NIKKEI225\_3 pro GARCH(1,1) a EGARCH(1,1)**



#### 4.4.2 Test autokorelace

Autokorelace bude ověřena testem autokorelace v programu EViews, na jehož základě bude určeno, zda jsou časové řady reziduí sériově závislé na časových řadách zpožděných reziduí. Zpoždění bylo stanoveno na deset období. Požadovaným výsledkem je nekorelovanost reziduí.

##### a) USA

Jak je patrné z tabulek č. 4.9 až 4.11, ve všech případech byla u indexu NASDAQ Composite na hladině významnosti 5 % vyloučena přítomnost autokorelace reziduí.



**Tab. č. 4.9: Autokorelační koeficienty modelů časové řady NASDAQ\_1**

	AC	PAC	Q-Stat	Prob		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.021	0.021	0.4154	0.519	1	0.023	0.023	0.4943	0.482
2	-0.046	-0.047	2.3934	0.302	2	-0.045	-0.046	2.4097	0.300
3	0.018	0.021	2.7100	0.439	3	0.011	0.013	2.5198	0.472
4	-0.043	-0.047	4.4575	0.348	4	-0.042	-0.045	4.1441	0.387
5	-0.008	-0.004	4.5227	0.477	5	-0.018	-0.014	4.4335	0.489
6	-0.008	-0.012	4.5768	0.599	6	-0.004	-0.008	4.4509	0.616
7	-0.047	-0.046	6.6566	0.465	7	-0.033	-0.034	5.4872	0.601
8	-0.017	-0.018	6.9360	0.544	8	-0.019	-0.020	5.8254	0.667
9	-0.012	-0.016	7.0701	0.630	9	-0.025	-0.028	6.3949	0.700
10	0.017	0.017	7.3555	0.692	10	0.023	0.023	6.8946	0.735

**Tab. č. 4.10: Autokorelační koeficienty modelů časové řady NASDAQ\_2**

	AC	PAC	Q-Stat	Prob		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.030	-0.030	0.3994	0.527	1	-0.010	-0.010	0.0397	0.842
2	-0.037	-0.038	0.9915	0.609	2	-0.038	-0.038	0.6495	0.723
3	0.028	0.026	1.3257	0.723	3	0.035	0.035	1.1949	0.754
4	0.004	0.004	1.3321	0.856	4	-0.006	-0.006	1.2080	0.877
5	-0.003	-0.001	1.3374	0.931	5	-0.016	-0.013	1.3180	0.933
6	-0.023	-0.023	1.5625	0.955	6	-0.039	-0.042	1.9983	0.920
7	0.017	0.015	1.6829	0.975	7	0.013	0.012	2.0764	0.955
8	0.005	0.005	1.6944	0.989	8	0.003	0.001	2.0809	0.978
9	0.038	0.041	2.3401	0.985	9	0.039	0.043	2.7474	0.973
10	0.020	0.022	2.5183	0.991	10	0.021	0.021	2.9450	0.983

**Tab. č. 4.11: Autokorelační koeficienty modelů časové řady NASDAQ\_3**

	AC	PAC	Q-Stat	Prob		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.021	-0.021	0.3561	0.551	1	-0.036	-0.036	1.0207	0.312
2	0.018	0.017	0.5991	0.741	2	-0.011	-0.013	1.1212	0.571
3	-0.052	-0.051	2.6938	0.441	3	-0.016	-0.017	1.3227	0.724
4	0.025	0.023	3.2058	0.524	4	0.028	0.026	1.9285	0.749
5	0.043	0.045	4.6444	0.461	5	0.026	0.028	2.4769	0.780
6	-0.024	-0.026	5.1146	0.529	6	0.001	0.004	2.4782	0.871
7	-0.002	-0.002	5.1163	0.646	7	-0.003	-0.002	2.4872	0.928
8	-0.005	0.000	5.1328	0.743	8	-0.015	-0.015	2.6740	0.953
9	-0.069	-0.074	8.9302	0.444	9	-0.063	-0.066	5.8310	0.757
10	-0.021	-0.025	9.2960	0.504	10	-0.033	-0.040	6.7053	0.753

## b) Japonsko

Stejně jako v předchozím případě lze u každého lineárního i nelineárního modelu vyloučit sériovou závislost časové řady reziduí na časových řadách zpožděných reziduí, a to ve všech třech obdobích. Rezidua modelů indexu Nikkei 225 nejsou autokorelována na hladině významnosti 5 %.

**Tab. č. 4.12: Autokorelační koeficienty modelů časové řady NIKKEI225\_1**

	AC	PAC	Q-Stat	Prob		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.016	0.016	0.2412	0.623	1	0.014	0.014	0.1850	0.667
2	-0.023	-0.024	0.7421	0.690	2	-0.012	-0.012	0.3215	0.852
3	0.022	0.023	1.1909	0.755	3	0.025	0.025	0.8859	0.829
4	-0.032	-0.033	2.1233	0.713	4	-0.032	-0.033	1.8253	0.768
5	0.018	0.020	2.4183	0.789	5	0.017	0.019	2.0996	0.835
6	0.010	0.007	2.5034	0.868	6	0.015	0.013	2.3080	0.889
7	0.023	0.025	2.9892	0.886	7	0.029	0.031	3.1172	0.874
8	-0.072	-0.075	7.8665	0.447	8	-0.082	-0.085	9.4548	0.305
9	-0.008	-0.003	7.9297	0.541	9	-0.013	-0.009	9.6024	0.384
10	0.045	0.041	9.7886	0.459	10	0.037	0.035	10.907	0.365

**Tab. č. 4.13: Autokorelační koeficienty modelů časové řady NIKKEI225\_2**

	AC	PAC	Q-Stat	Prob		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.055	-0.055	1.2864	0.257	1	-0.025	-0.025	0.2636	0.608
2	-0.001	-0.004	1.2869	0.525	2	0.002	0.001	0.2650	0.876
3	-0.032	-0.033	1.7345	0.629	3	-0.022	-0.022	0.4796	0.923
4	0.044	0.040	2.5595	0.634	4	0.052	0.051	1.6753	0.795
5	-0.007	-0.003	2.5835	0.764	5	0.007	0.010	1.6985	0.889
6	-0.034	-0.036	3.0970	0.797	6	-0.021	-0.022	1.8977	0.929
7	-0.038	-0.040	3.7340	0.810	7	-0.043	-0.042	2.7020	0.911
8	0.069	0.063	5.8291	0.666	8	0.063	0.059	4.4268	0.817
9	-0.045	-0.040	6.7139	0.667	9	-0.049	-0.048	5.4787	0.791
10	0.025	0.022	6.9947	0.726	10	0.018	0.016	5.6181	0.846

**Tab. č. 4.14: Autokorelační koeficienty modelů časové řady NIKKEI225\_3**

	AC	PAC	Q-Stat	Prob		AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.003	-0.003	0.0079	0.929	1	-0.013	-0.013	0.1409	0.707
2	-0.010	-0.010	0.0823	0.960	2	-0.003	-0.003	0.1476	0.929
3	0.025	0.025	0.5735	0.902	3	0.016	0.016	0.3406	0.952
4	-0.004	-0.004	0.5842	0.965	4	0.006	0.006	0.3671	0.985
5	-0.030	-0.029	1.2815	0.937	5	-0.033	-0.033	1.2446	0.941
6	0.025	0.024	1.7748	0.939	6	0.034	0.033	2.1541	0.905
7	-0.007	-0.007	1.8130	0.969	7	0.004	0.005	2.1693	0.950
8	-0.039	-0.037	3.0303	0.932	8	-0.035	-0.034	3.1635	0.924
9	-0.008	-0.010	3.0793	0.961	9	-0.000	-0.002	3.1635	0.957
10	0.059	0.058	5.8694	0.826	10	0.054	0.053	5.5237	0.854

#### 4.4.3 Test heteroskedasticity

Heteroskedasticita nejlepších modelů bude testována ARCH-LM testem v programu EViews, tedy obdobně jako u časových řad sledovaných období. Rozdíl však spočívá v požadovaném výsledku. Zatímco u časových řad vybraných indexů byla požadována přítomnost heteroskedasticity jako podmínky pro užití modelů podmíněné heteroskedasticity, u odhadnutých modelů volatility je požadavek přesně opačný. Odhadem by měla být heteroskedasticita odstraněna, a tak přijata nulová hypotéza o homoskedasticitě



na hladině významnosti 5 %. Cílem je najít u jedné časové řady alespoň jeden model homoskedastický.

**Tab. č. 4.15: ARCH-LM test nejlepších odhadů modelů pro časovou řadu NASDAQ**

	NASDAQ_1		NASDAQ_2		NASDAQ_3	
	GARCH(1,2)	EGARCH(0,1)	IGARCH(1,2)	EGARCH (2,2)	GARCH (1,1)	EGARCH (2,1)
RESID^2 (-1)	-1,2905	-1,8491	-1,2806	0,3325	-1,9559	-0,0857
P-st	0,1972	0,0648	0,2010	0,7397	0,0508	0,9317
RESID^2 (-2)	-0,1532	-1,1280	0,0174	0,6858	3,0275	-0,1510
P-st	0,8783	0,2596	0,9861	0,4932	0,0025	0,8800
RESID^2 (-3)	-0,5232	-0,9375	-0,8036	-0,3402	0,6276	-0,4207
P-st	0,6009	0,3487	0,4221	0,7339	0,5304	0,6741
RESID^2 (-4)	-0,1149	-0,2426	-0,0386	-0,6867	0,1743	-0,2878
P-st	0,9085	0,8083	0,9692	0,4927	0,8617	0,7736

Jak je patrné z hodnot uvedených v tabulce 4.15, u pěti ze šesti modelů lze přijmout nulovou hypotézu, a označit tak jejich rozptyl standardizovaných reziduí za konstantní. Heteroskedasticita se vyskytla pouze u modelu GARCH(1,1) časové řady NASDAQ\_3, zde se objevuje statisticky nevýznamný čtverec reziduí při dvoudenním zpoždění, takže v tomto případě byla přijata alternativní hypotéza.

**Tab. č. 4.16: ARCH-LM test nejlepších odhadů modelů pro časovou řadu NIKKEI 225**

	NIKKEI225_1		NIKKEI225_2		NIKKEI225_3	
	IGARCH(1,1)	CGARCH(1,1)	GARCH (2,1)	CGARCH(1,1)	GARCH(1,1)	EGARCH(1,1)
RESID^2 (-1)	0,7858	-0,0023	1,0744	0,1507	4,1540	1,8721
P-st	0,4322	0,9982	0,2833	0,8803	0,0000	0,0616
RESID^2 (-2)	-0,2765	0,0581	0,4745	0,9423	0,6076	1,0159
P-st	0,7823	0,9537	0,6354	0,3466	0,5436	0,3100
RESID^2 (-3)	2,4607	1,1591	0,3587	-0,2416	-1,4661	-0,9606
P-st	0,0140	0,2467	0,7200	0,8092	0,1430	0,3370
RESID^2 (-4)	0,7075	1,1660	1,3763	1,0130	-0,4019	-0,0615
P-st	0,4794	0,3439	0,1695	0,3117	0,6878	0,9510

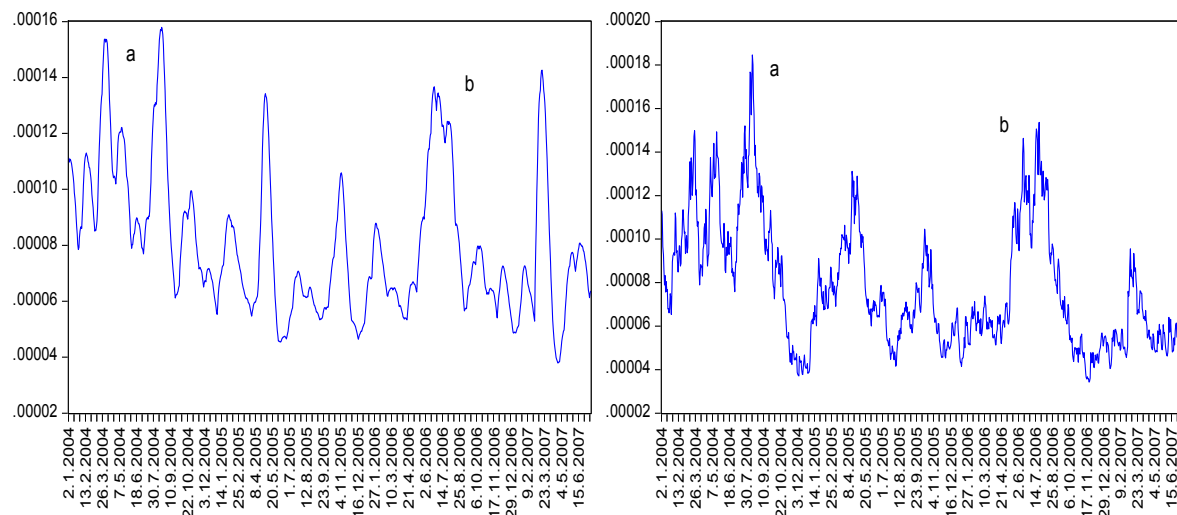
Tabulka č. 4.16 ukazuje, že se heteroskedasticita vyskytuje v prvním období u lineárního modelu IGARCH(1,1), kde je statisticky nevýznamný čtverec reziduí při třídním zpoždění, a ve třetím období u lineárního modelu GARCH(1,1), u něhož je nevýznamný čtverec reziduí už při jednodenním zpoždění. V těchto případech je přijata alternativní hypotéza.

## 4.5 Grafické vyjádření volatility

Obsahem této kapitoly je grafické vyjádření volatility formou podmíněného rozptylu, který byl namodelován pomocí lineárních a nelineárních modelů volatility z kapitoly č. 4.3. Řazení jednotlivých grafů je stejné jako v předchozí kapitole. Vývoj volatility a její významné výkyvy jsou pro každé období doplněny zdůvodňujícím komentářem.

### a) USA

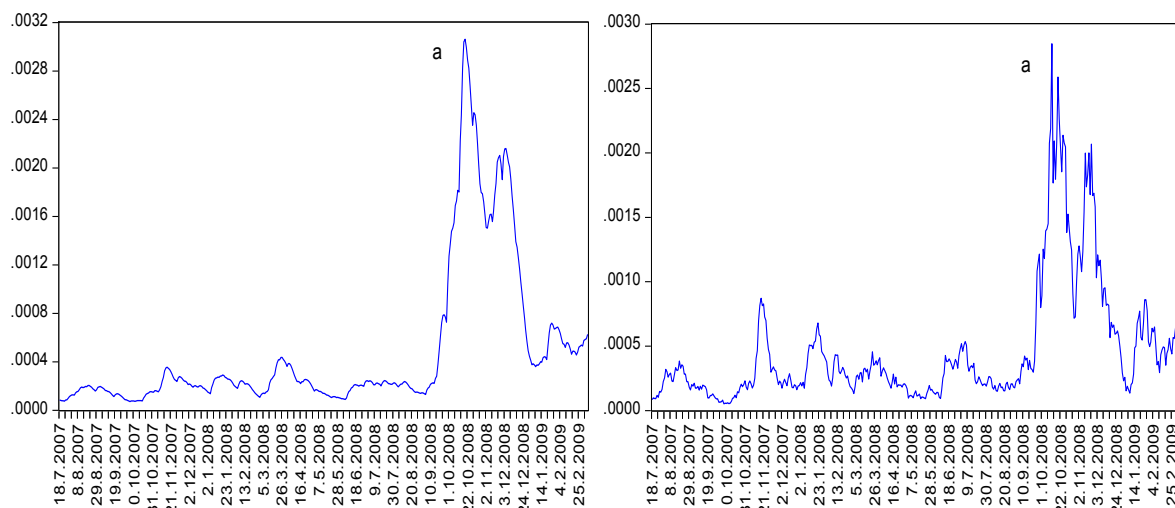
**Graf č. 4.6: Vývoj volatility indexu NASDAQ Composite v 1. období**



První výrazný výkyv volatility v grafu č. 4.6 je zřejmý v srpnu 2004 (a), vlna optimismu na trhu byla způsobena zveřejněním indexu důvěry spotřebitelů, jehož hodnota v té době dosáhla na dvouleté maximum, a rovněž zlepšující se vývoj na trhu práce. Na druhou stranu existovaly obavy způsobené zejména stoupající cenou ropy, která dosahovala rekordně vysokých hodnot.

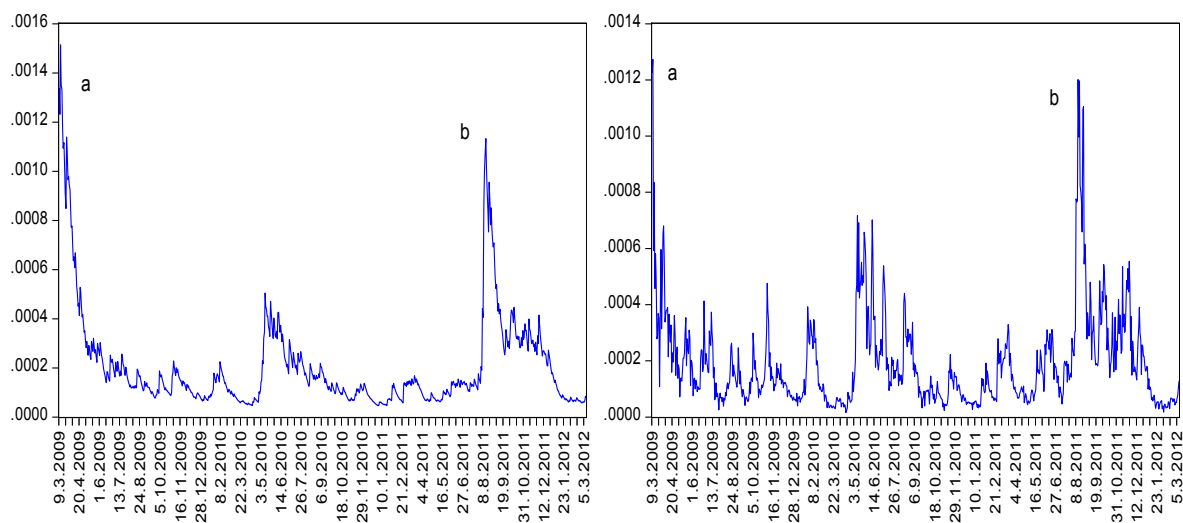
K druhému výraznému výkyvu volatility došlo v půlce roku 2006 (b), který byl způsoben nepokoji na Blízkém východě, což se promítlo do cen ropy na světových trzích. Svou roli měly také obavy z inflačních tlaků jako výrazného ohrožení globálního růstu.

**Graf č. 4.7: Vývoj volatility indexu NASDAQ Composite v 2. období**



Graf č. 4.7 zobrazuje velice výrazný nárůst volatility od září do prosince 2008. Pro toto období je příznačná negativní nálada, která byla způsobena pádem banky Lehman Brothers 15. 9. 2008. Následně došlo k výrazným propadům všech amerických indexů. Nebylo možné určit, kdy ceny akcií dosáhnou svého dna, což zapříčinilo růst volatility, která dosáhla svého maxima v polovině října 2008 (a).

**Graf č. 4.8: Vývoj volatility indexu NASDAQ Composite v 3. období**

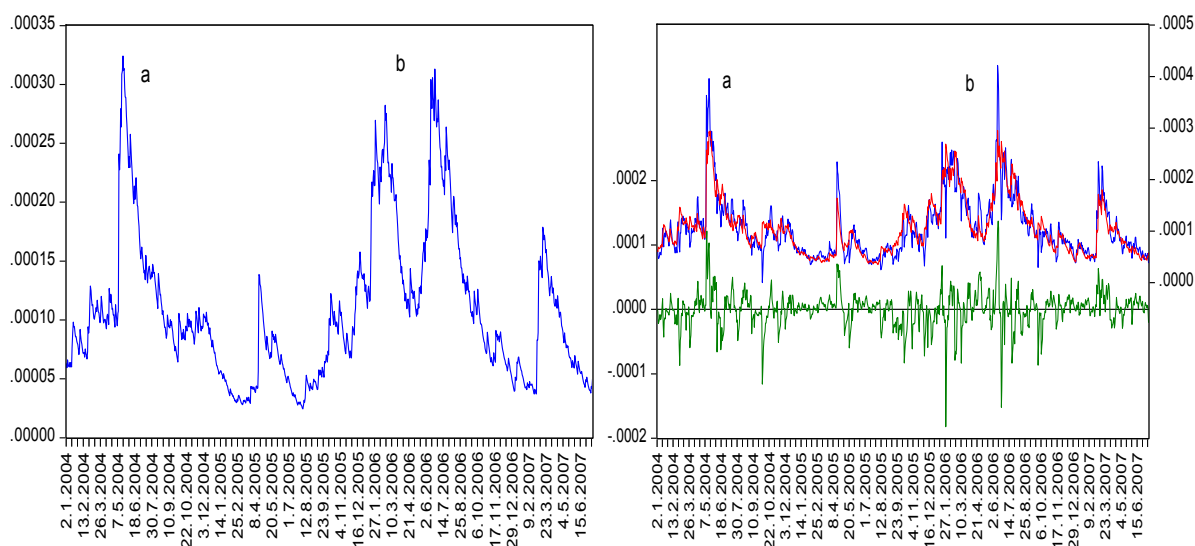


Jak je patrné z grafu č. 4.8, vysokou volatilitu lze zaznamenat už na počátku třetího období (a), kdy se akciové trhy dostaly na své dno v důsledku negativních makroekonomických zpráv.

Zvýšení volatility v polovině roku 2011 (b) je projevem přetrvávající nejistoty na finančním trhu, která byla způsobena snížením ratingu Spojených států a obavami z negativního vývoje světové ekonomiky.

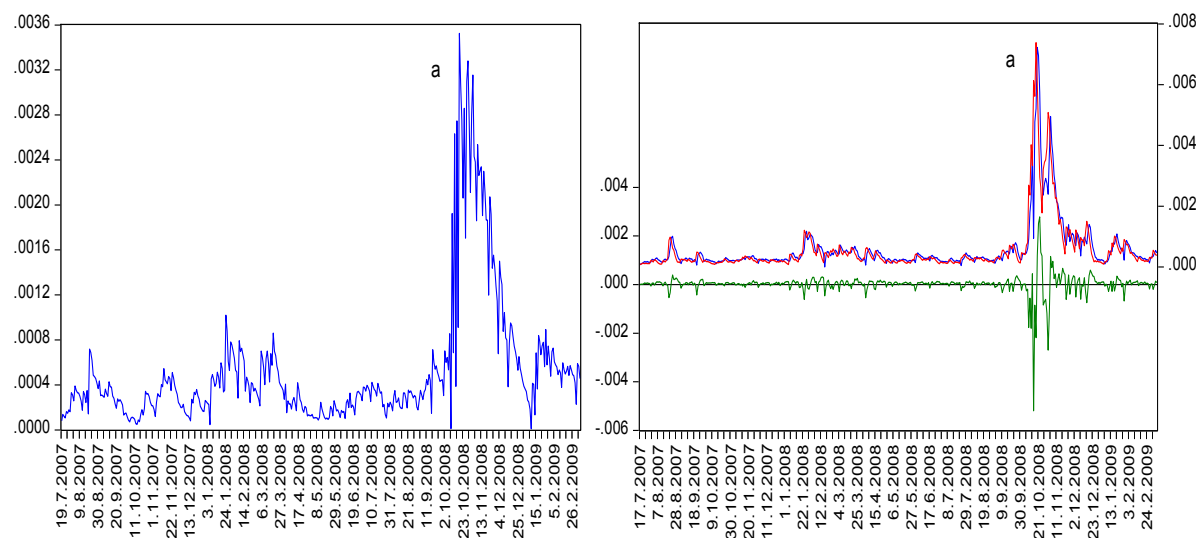
## b) Japonsko

**Graf č. 4.9: Vývoj volatility indexu Nikkei 225 v 1. období**



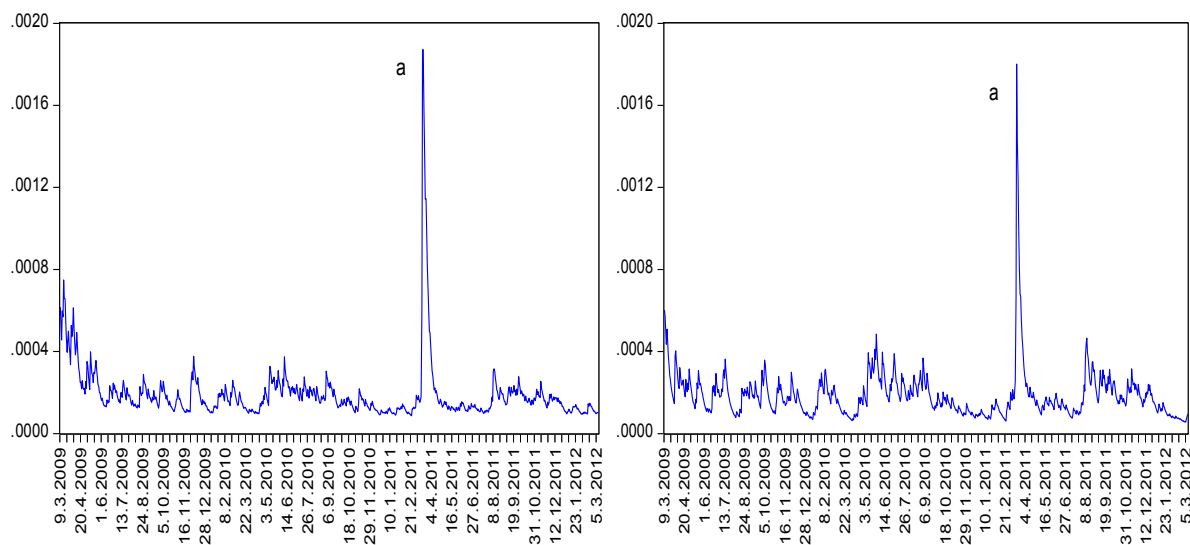
Oba nárůsty volatility v grafu č. 4.9 z května 2004 (a) i ledna a srpna 2006 byly způsobeny nepokoji na Blízkém východě a kolísáním ceny ropy na světových trzích, které ovlivnily i americký Index NASDAQ Composite (viz graf č. 4.6). Graf na pravé straně je grafickým zobrazením dvou typů volatility modelu CGARCH, zelená linie zde představuje přechodnou volatilitu, červená dlouhodobou. Modrá je pak součtem obou těchto složek a představuje celkový podmíněný rozptyl.

**Graf č. 4.10: Vývoj volatility indexu Nikkei 225 v 2. období**



V říjnu 2008 došlo k propadům cen akcií v celé Asii, japonský Nikkei 225 se 6. října uzavřel na nejnižší úrovni za posledního čtyři a půl roku, což se projevilo ve vysokém nárůstu volatility (a). Na trzích stále panovala negativní nálada týkající se obav o další vývoj finančního sektoru, a to i přes schválení amerického balíku, který měl do finančního sektoru přinést 700 miliard dolarů. Viz graf č. 4.10.

**Graf č. 4.11: Vývoj volatility indexu Nikkei 225 v 3. období**



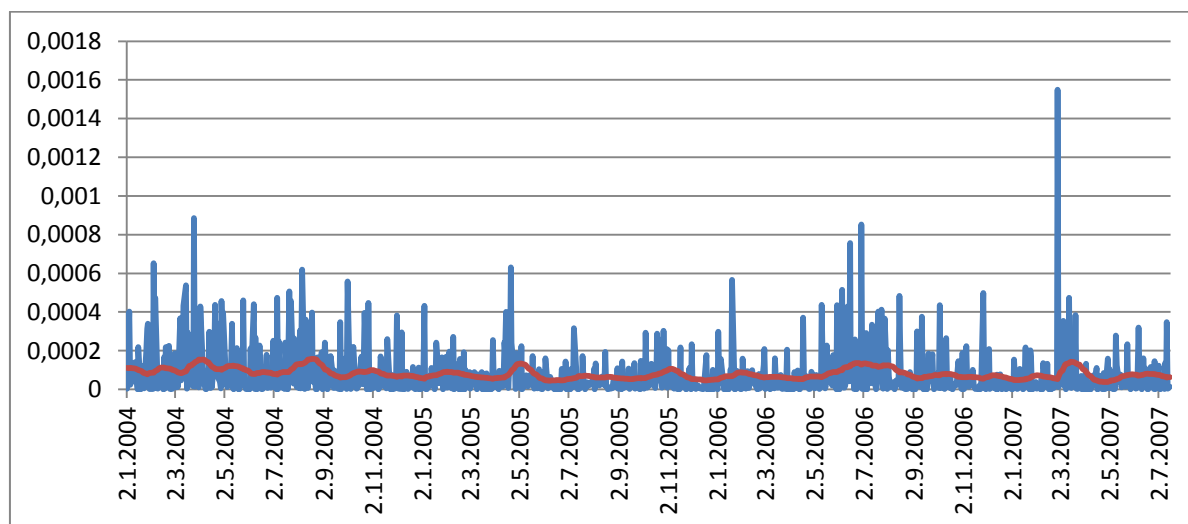
V grafu č. 4.11 je patrný extrémní nárůst volatility z 11. března 2011(a), kdy došlo k zemětřesení o síle 9,0 stupně Richterovy škály a následně vlnám tsunami v japonském Tóhoku, což se logicky velmi negativně projevilo i na finančním trhu.

#### 4.6 Grafické srovnání odhadovaného a skutečného podmíněného rozptylu

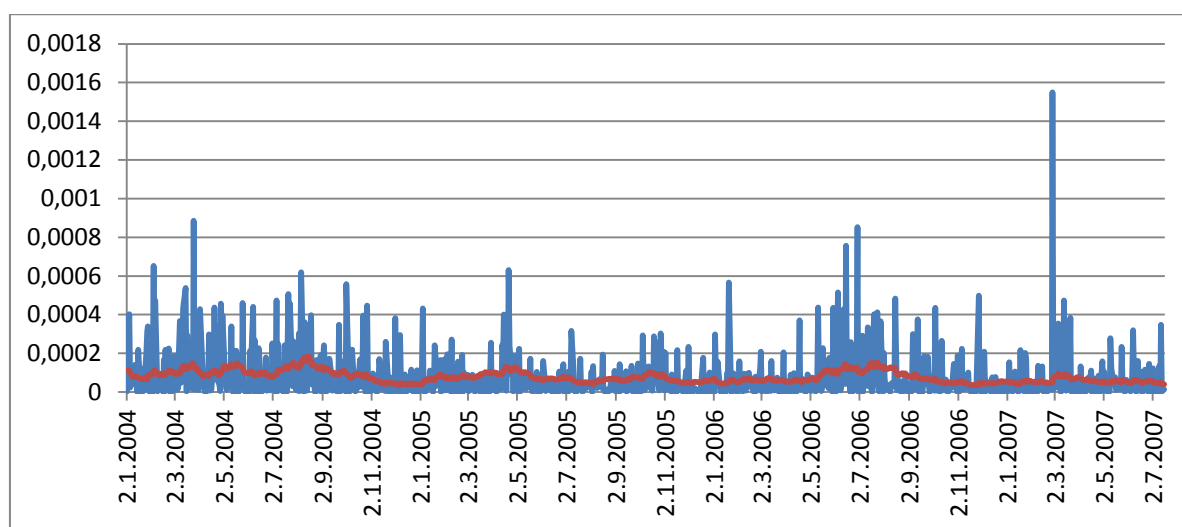
Následující kapitola obsahuje dvanáct grafů, které jsou grafickým porovnáním skutečné volatility (stanovené jako čtverec výnosů; modrá barva) a modelované volatility (červená barva). Rozdělení grafů podle zemí a období je podobné jako v předešlých kapitolách.

##### a) USA

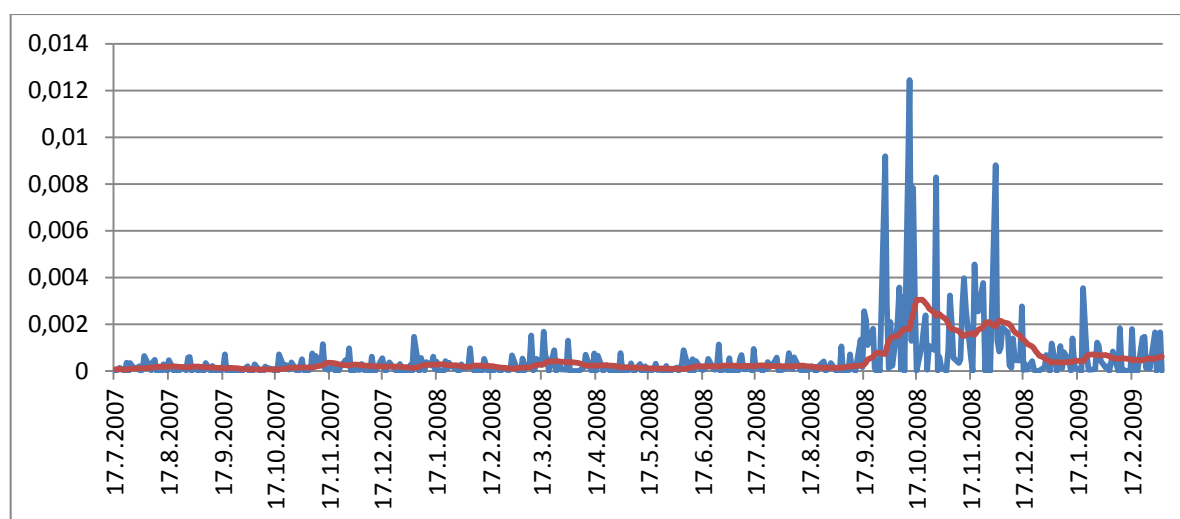
**Graf č. 4.12: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu GARCH(1,2) pro NASDAQ\_1**



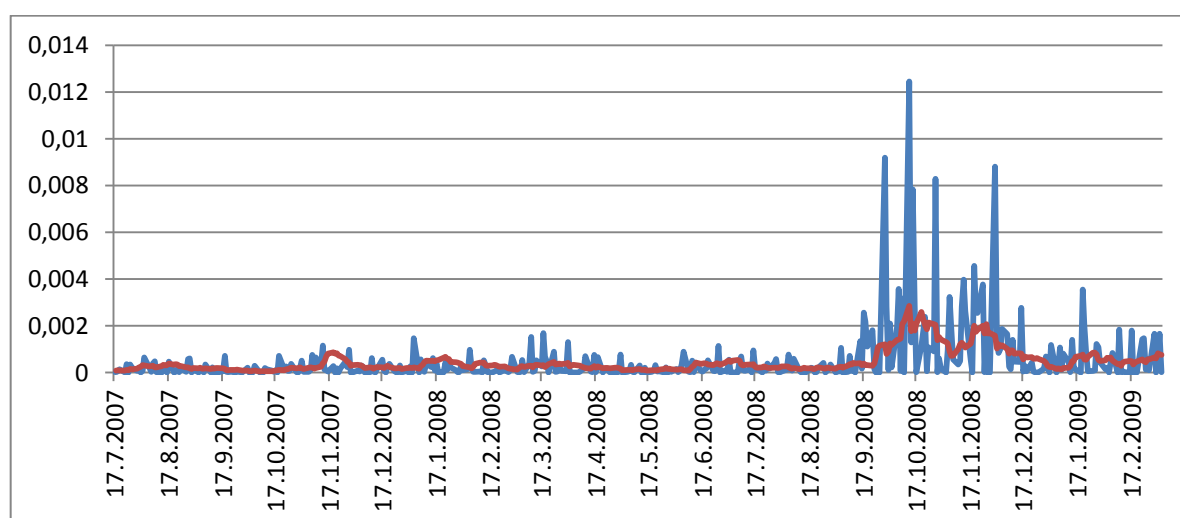
**Graf č. 4.13: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu EGARCH(0,1) pro NASDAQ\_1**



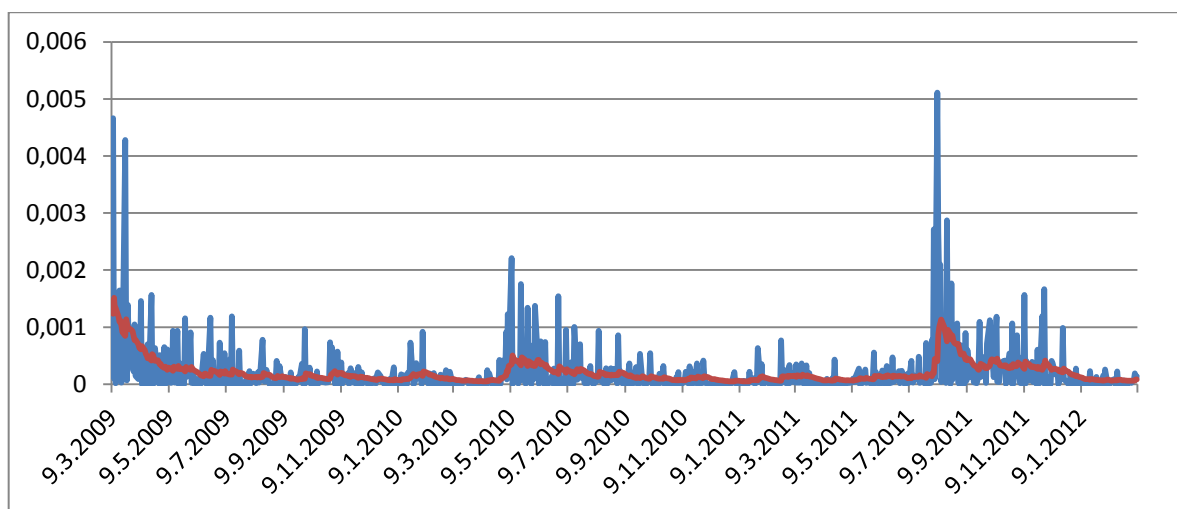
**Graf č. 4.14: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu IGARCH(1,2) pro NASDAQ\_2**



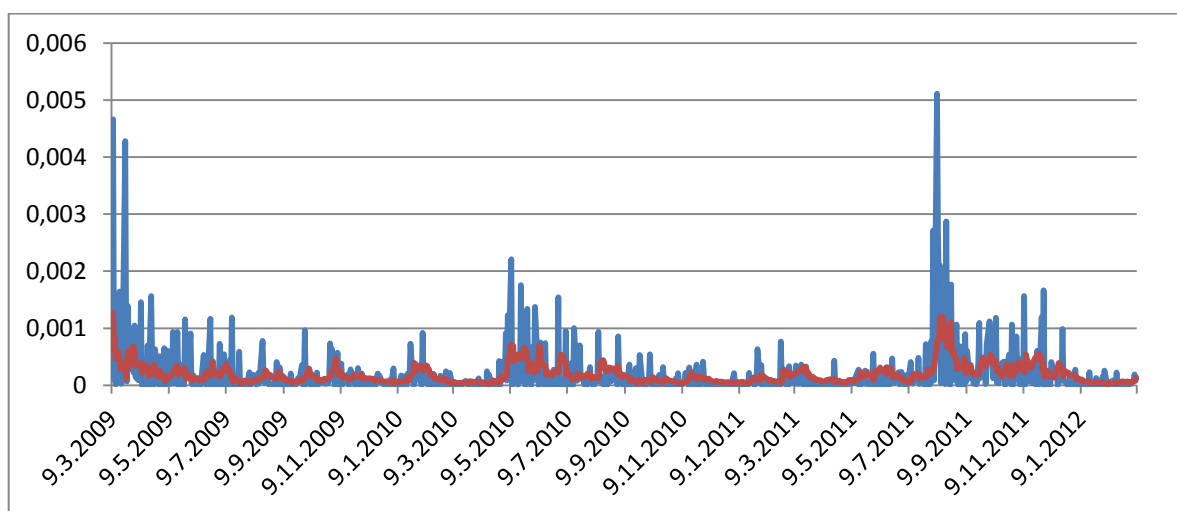
**Graf č. 4.15: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu EGARCH(2,2) pro NASDAQ\_2**



**Graf č. 4.16: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu GARCH(1,1) pro NASDAQ\_3**



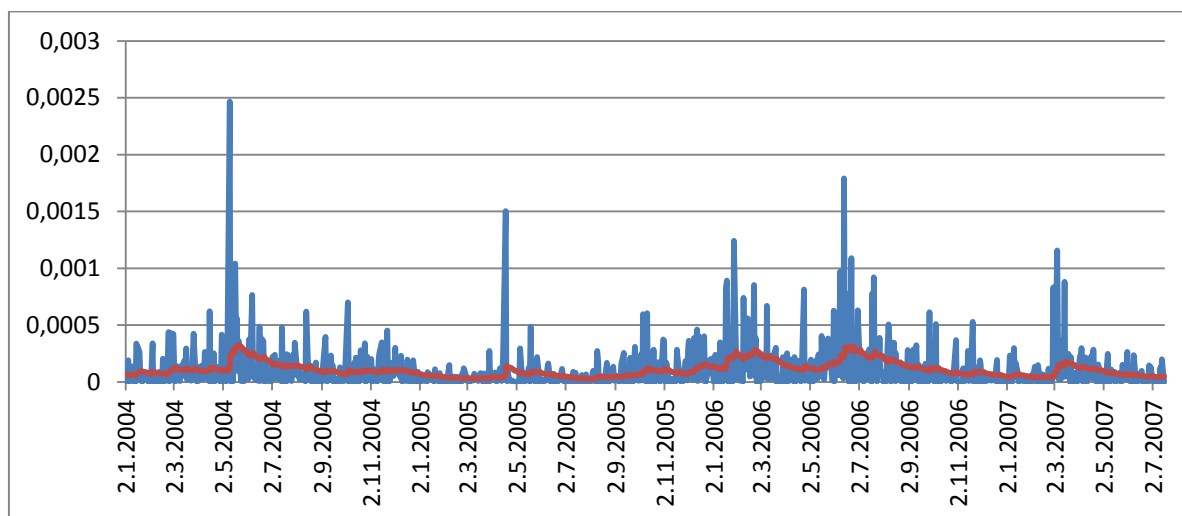
**Graf č. 4.17: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu EGARCH(2,1) pro NASDAQ\_3**



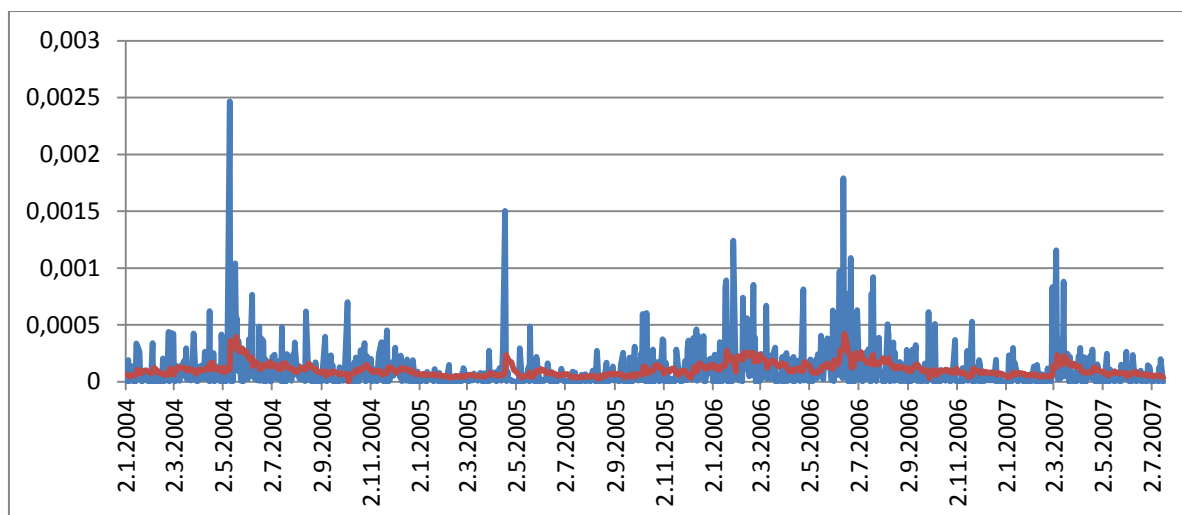
Jak je zřejmé ze tří výše uvedených dvojic grafů, ve všech třech obdobích odpovídá u indexu NASDAQ Composite skutečné volatilitě lépe volatilita modelovaná prostřednictvím nelineárních modelů, a to postupně EGARCH(0,1), EGARCH(2,2) a EGARCH(2,1). Lépe vykresluje skutečnost, což je patrné při pohledu na způsob, jakým kopíruje červená linie modrou.

## b) Japonsko

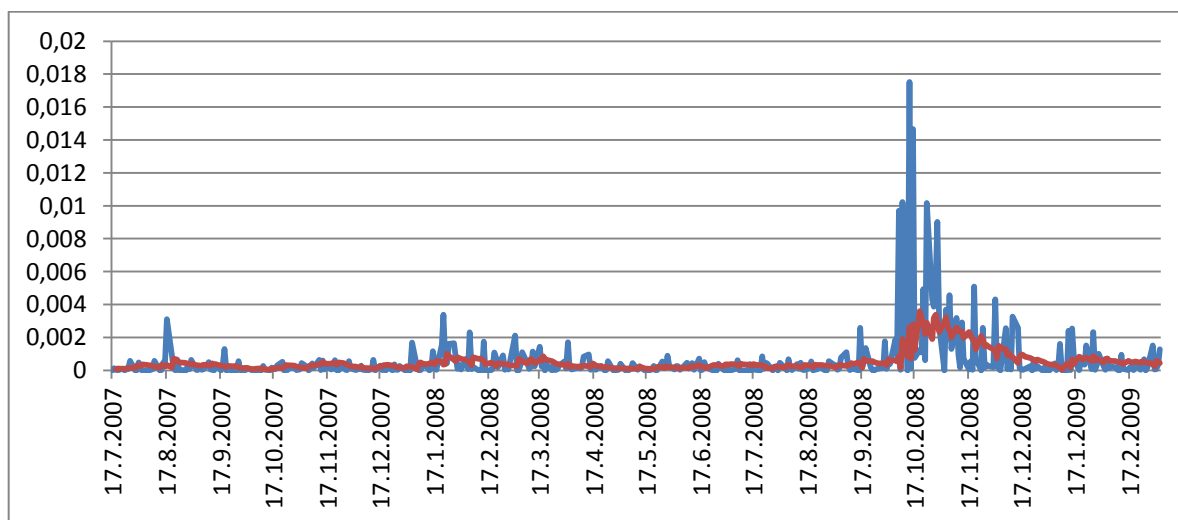
**Graf č. 4.18: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu IGARCH(1,1) pro NIKKEI225\_1**



**Graf č. 4.19: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu CGARCH(1,1) pro NIKKEI225\_1**

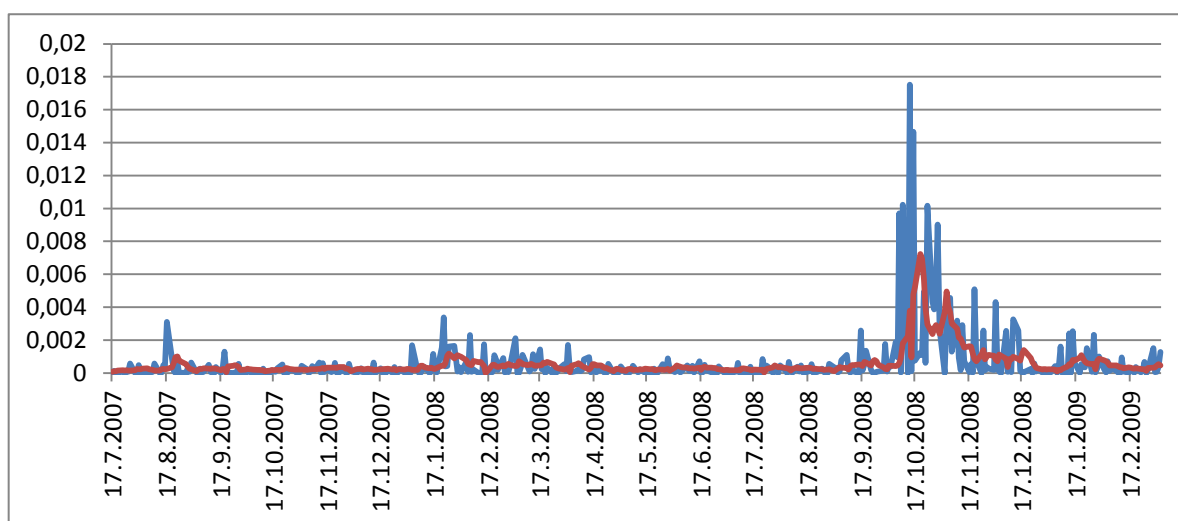


**Graf č. 4.20: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu GARCH(2,1) pro NIKKEI225\_2**

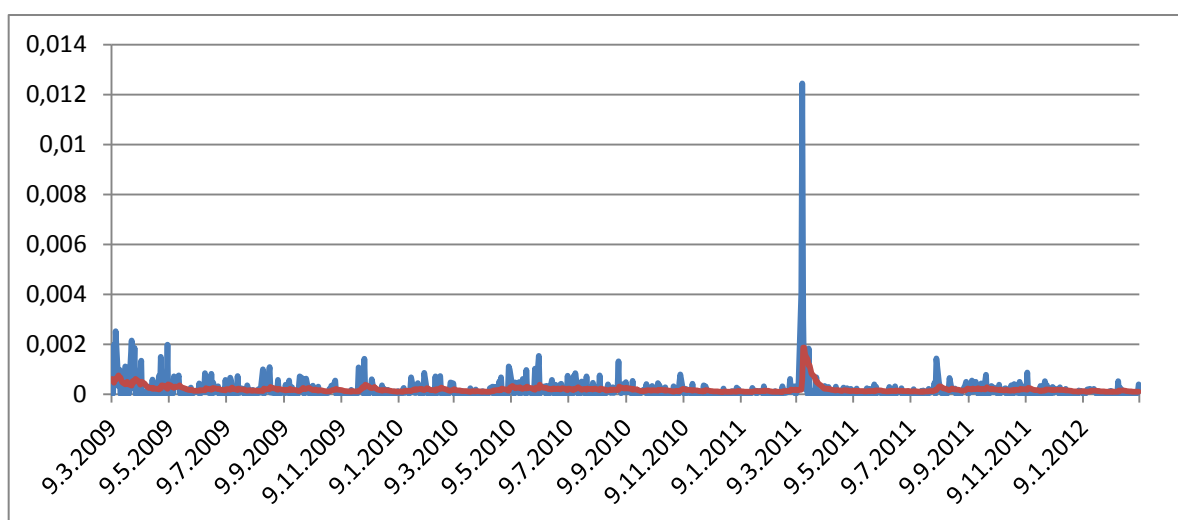




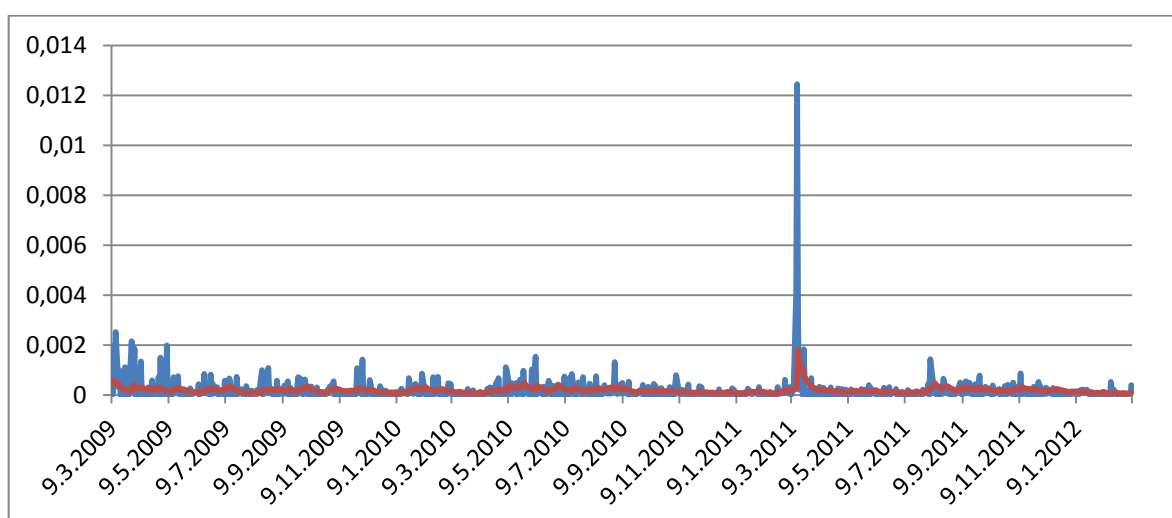
**Graf č. 4.21: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu CGARCH(1,1) pro NIKKEI225\_2**



**Graf č. 4.22: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu GARCH(1,1) pro NIKKEI225\_3**



**Graf č. 4.23: Skutečný a odhadovaný rozptyl modelu EGARCH(1,1) pro NIKKEI225\_3**



U japonského indexu Nikkei 225 je na první pohled zřejmé, že je reálněji modelován podmíněný rozptyl opět nelineárními modely. V prvním období a druhém období je predikce kvalitnější u modelu CGARCH(1,1) a ve třetím u EGARCH(1,1). Tyto výsledky však budou ještě ověřeny výpočtem hodnot ztrátových funkcí v nadcházející kapitole.

#### 4.7 Hodnocení predikčních schopností ex-post jednotlivých modelů

V této kapitole jsou vypočteny hodnoty ztrátových funkcí jednotlivých modelů pro jednodenní predikci ex-post. Při výpočtu bylo vycházeno z kapitoly 3.5 a využito programu MS Excel. Ve výsledných tabulkách č. 4.17 a 4.18 byly vždy v rámci každého období u obou indexů hledány nejmenší hodnoty těchto funkcí, aby tak mohl být vybrán vhodnější model. Za pomoci funkce podmíněné formátování v MS Excel jsou vždy menší hodnoty zobrazeny v červené buňce.

**Tab. č. 4.17: Hodnocení predikčních schopností odhadnutých modelů pro NASDAQ**

NASDAQ Composite	MSE	RMSE	MAE	GLME
GARCH (1,2)	1,61E-08	1,27E-04	8,27E-05	-8,4734
EGARCH (0,1)	1,55E-08	1,25E-04	7,96E-05	-8,5038
IGARCH (1,2)	1,16E-06	1,08E-03	5,07E-04	-6,9475
EGARCH (2,2)	1,02E-06	1,01E-03	4,80E-04	-7,0196
GARCH (1,1)	1,68E-07	4,10E-04	2,16E-04	-7,7834
EGARCH (2,1)	1,55E-07	3,94E-04	2,01E-04	-7,8592

Jak je patrné z údajů v tabulce č. 4.17, pro index NASDAQ Composite bude mít v každém období schopnost kvalitnější predikce volatility ex-post vždy nelineární model. Pro první období EGARCH(0,1), pro druhé EGARCH(2,2) a pro poslední EGARCH(2,1). Tyto výsledky odpovídají závěrům z předchozí kapitol vycházejících z grafů č. 12 až č. 17. Protože se hodnoty jednotlivých ztrátových funkcí vyvíjí stejně, a v posouzení kvality tak dochází ke shodě, není třeba užít testů určujících váhy jednotlivých ztrátových funkcí zmíněných v kapitole 3.5.

**Tab. č. 4.18: Hodnocení predikčních schopností odhadnutých modelů pro Nikkei 225**

Nikkei 225	MSE	RMSE	MAE	GLME
IGARCH (1,1)	3,71E-08	1,93E-04	1,14E-04	-8,2098
CGARCH (1,1)	3,58E-08	1,89E-04	1,11E-04	-8,2482
GARCH (2,1)	1,88E-06	1,37E-03	5,70E-04	-6,9154
CGARCH (1,1)	1,95E-06	1,40E-03	5,98E-04	-6,9020
GARCH (1,1)	2,85E-07	5,34E-04	2,09E-04	-7,6812
EGARCH (1,1)	2,78E-07	5,28E-04	2,05E-04	-7,7035

I v případě japonského indexu Nikkei 225 dochází k jasným výsledkům během jednotlivých období. Vyjma druhého období, kdy vyhovuje lépe použití lineárního model  $GARCH(2,1)$ , se v prvním a třetím bude lépe predikovat volatilita s pomocí nelineárních modelů  $CGARCH(1,1)$  a  $EGARCH(1,1)$ . V druhém období se liší výsledek od závěru stanoveného na základě grafického výsledku z předchozí kapitoly, kde se jevil jako lepší nelineární model  $CGARCH(1,1)$ .

Při porovnání hodnot ztrátových funkcí z hlediska sledovaných období je z obou tabulek zřejmé, že vyšších hodnot dosahují ve druhém, krizovém období. Právě vyšší hodnota volatility zapříčiňuje zhoršené predikční schopnosti daných modelů. Z hlediska jednotlivých zemí lze podle výše hodnot ztrátových funkcí konstatovat, že se dá lépe predikovat volatilita ex-post u indexu NASDAQ.

## 5 Shrnutí výsledků

V předchozí, čtvrté kapitole byla aplikována metodologie ze třetí kapitoly na reálná data. K modelování a predikci volatility ex-post byly vybrány americký index NASDAQ Composite a japonský Nikkei 225.

Vybrané indexy byly nejdříve popsány a jejich časové řady byly rozděleny na tři dílčí časová období, a to tím způsobem, aby bylo možno zachytit vývoj volatility před globální finanční krizí, v jejím průběhu a po ní.

Prvním krokem bylo u jednotlivých časových řad provedení výpočtu deskriptivních statistik a zobrazení rozdělení četností pomocí programu EViews. Bylo zjištěno, že ani jedna časová řada nemá normální rozdělení četností.

V druhém kroku byla u časových řad testována stacionarita výnosů pomocí rozšířeného Dickey-Fuller testu jednotkovosti kořene (Unit-Root Test). U obou indexů ve všech časových obdobích byla přijata nulová hypotéza o stacionaritě, a to na 1 %, 5 % i 10 % hladině významnosti, jak je zaznamenáno v tabulce č. 4.1.

Poté následoval ARCH-LM test heteroskedasticity výnosů, kdy bylo požadováno přijetí alternativní hypotézy o heteroskedasticitě, neboť pak by bylo vhodné použít pro modelování a analýzu volatility modely podmíněné heteroskedasticity. Za závislou proměnnou byl považován čtverec reziduí a za nezávislou proměnnou zpožděné čtverce reziduí o čtyři dny a konstanta. Výstup, ve kterém se potvrzuje existence heteroskedasticity u všech časových řad, je zachycen v tabulce č. 4.2.

Nejdůležitější kapitolou byla kapitola 4.3, kdy byly prostřednictvím programu Eviews hledány nejvhodnější modely pro každou časovou řadu obou indexů. Po otestování bezmála tří set modelů, kdy bylo přihlíženo zejména k významnosti jednotlivých parametrů, hodnotu Akaikeho a Schwarzova kritéria a hodnotu funkce věrohodnosti, bylo vybráno šest lineárních a šest nelineárních modelů, jejichž parametry jsou zachyceny v tabulkách č. 4.3 až 4.8.

V kapitole 4.4 byly provedeny testy standardizovaných reziduí odhadnutých modelů na normalitu, autokorelaci a heteroskedasticitu. Výsledky tohoto testování jsou zachyceny tabulce č. 5.1, přičemž ke každé časové řadě je lineární model uveden vždy první.

**Tab. č. 5.1: Souhrnné výsledky diagnostických testů standardizovaných reziduí pro jednotlivé modely**

	Model	Normalita	Autokorelace	Heteroskedasticita
NASDAQ_1	GARCH (1,2)	NE	NE	NE
	EGARCH (0,1)	NE	NE	NE
NASDAQ_2	IGARCH (1,2)	ANO	NE	NE
	EGARCH (2,2)	ANO	NE	NE
NASDAQ_3	GARCH (1,1)	NE	NE	ANO
	EGARCH (2,1)	NE	NE	NE
NIKKEI225_1	IGARCH (1,1)	NE	NE	ANO
	CGARCH (1,1)	NE	NE	NE
NIKKEI225_2	GARCH (2,1)	NE	NE	NE
	CGARCH (1,1)	NE	NE	NE
NIKKEI225_3	GARCH (1,1)	NE	NE	ANO
	EGARCH (1,1)	NE	NE	NE

Jak je patrné z tabulky č. 5.1, normální rozdělení četností bylo zjištěno pouze u modelu IGARCH (1,2) a EGARCH (2,2) ve druhém období u indexu NASDAQ Composite, v ostatních případech se jedná o jiný typ rozdělení. K testu normality byl využit Jarque-Bera test.

Autokorelace nebyla zjištěna ani u jednoho modelu, sériovou závislost časové řady reziduí na svých zpožděných hodnotách lze vyloučit ve všech případech.

Přítomnost heteroskedasticity byla detekována ARCH-LM testem ve třech případech, rozptyl standardizovaných reziduí není konstantní u modelu GARCH(1,1) ve třetím období u indexu NASDAQ a v prvním a třetím období u lineárních modelů IGARCH(1,1) a GARCH(1,1) u indexu Nikkei 225.

Obsahem navazující kapitoly bylo grafické vyjádření volatility, respektive podmíněného rozptylu jednotlivých modelů. Nejvýznamnější výkyvy volatility byly označeny a zdůvodněny.

Předposledním krokem bylo grafické zobrazení skutečné volatility, určené jako druhá mocnina výnosů, a modelované volatility. Na dvanácti grafech je vidět, že nelineární modely jsou ve vykreslení volatility blíže realitě než modely nelineární.

Závěrečná kapitola je věnována predikci volatility ex-post. Při výpočtu bylo vycházeno z kapitoly 3.5 a využito programu MS Excel. Ve výsledných tabulkách č. 4.17 a 4.18 byly vždy v rámci každého období u obou indexů hledány nejmenší hodnoty těchto funkcí, aby tak mohl být vybrán vhodnější model. Jak je zřejmé z dat zaznamenaných ve výše uvedených tabulkách, ve všech obdobích má lepší predikční schopnost nelineární model. Výjimkou je pouze druhé období u indexu Nikkei 225, kdy je v predikci přesnější lineární

model GARCH(2,1). Při porovnání hodnot ztrátových funkcí z hlediska sledovaných období je z obou tabulek zřejmé, že vyšších hodnot dosahují ve druhém, krizovém období. Právě vyšší hodnota volatility zapříčiňuje zhoršené predikční schopnosti daných modelů. Ve srovnání hodnoty ztrátových funkcí mezi jednotlivými indexy lze konstatovat, že přesnější predikce ex-post je možné dosáhnout u amerického indexu NASDAQ Composite.

## 6 Závěr

Při investicích na kapitálových trzích požaduje každý investor maximalizaci zisku při minimální úrovni rizika. Mezi ziskem, resp. výnosem platí přímá úměrnost, takže chce-li investor dosahovat vyšších zisků, musí podstoupit i vyšší úroveň rizika. Toto riziko se dá na finančních trzích označit jako volatilita.

Předmětem zkoumání této diplomové práce byla volatilita jako měřítko rizika finančního trhu. Hlavním cílem byla empirická analýza volatility a její predikce ex-post na akciových trzích USA a Japonska v období od 1. ledna 2004 do 8. března 2012 prostřednictvím akciových indexů NASDAQ Composite a Nikkei 225. Testovací období bylo rozděleno na tři různě dlouhá dílčí období, aby bylo možné zachytit vývoj volatility v kontextu globální finanční krize.

Předkládaná diplomová práce „Modelování a predikce volatility vybraných akciových indexů v kontextu globální finanční krize“ je tvořena úvodem, dvěma teoretickými kapitolami, které obsahují potřebnou metodologii, dvěma praktickými kapitolami, kde je aplikována metodologie na konkrétní časové řady, závěrem a přílohou.

Teoreticko-metodologická část obsahuje dvě hlavní kapitoly, přičemž první je věnována charakteristice finančních trhů, vlastnostem a předpokladům finančních časových řad, druhá základním přístupům k modelování a predikci volatility. Je vysvětlen pojem volatilita, představeny použité lineární a nelineární modely volatility, popsán způsob konstrukce těchto modelů a ztrátové funkce.

Aplikačně-ověřovací část práce je tvořena čtvrtou kapitolou. V ní jsou nejprve představeny vybrané akciové indexy, rozděleno testovací období na tři dílčí a provedena statistická analýza těchto šesti finančních časových řad denních výnosů. Je proveden test normality, stacionarity a heteroskedasticity výnosů. Následně jsou odhadnuty nejlepší možné lineární a nelineární modely volatility, jejichž rezidua jsou testována na normalitu, autokorelaci a heteroskedasticitu. V další části kapitoly je namodelovaná volatilita graficky vyjádřena a jednotlivé výkyvy jsou označeny a vysvětleny. V závěru je graficky znázorněn vývoj skutečného a odhadovaného podmíněného rozptylu a provedena predikce ex-post, při níž bylo využito ztrátových funkcí. V páté kapitole jsou shrnuty všechny výsledky předchozí kapitoly.

Pro naplnění hlavního cíle diplomové práce bylo pomocí programu Eviews odhadnuto velké množství lineárních a nelineárních modelů volatility, z nichž bylo vybráno pouze dvanáct nejlepších, tzn. pro každou časovou řadu jeden lineární a jeden nelineární. Rezidua těchto dvanácti modelů byla následně testována na normalitu, autokorelaci a heteroskedasticitu. Normální rozdělení bylo Jarque-Bera testem potvrzeno pouze ve druhém období pro lineární i nelineární model u amerického indexu NASDAQ Composite. V ostatních případech byla u reziduí jednotlivých modelů přijata alternativní hypotéza o jiném typu rozdělení.

Autokorelovanost reziduí byla na hladině významnosti 5 % vyloučena ve všech případech.

Heteroskedasticita byla testována ARCH-LM testem. Požadovaná nulová hypotéza o homoskedasticitě byla na hladině významnosti 5 % přijata u devíti modelů z dvanácti. Nekonstantní rozptyl reziduí byl zjištěn u lineárního modelu indexu NASDAQ ve třetím období a u lineárních modelů indexu Nikkei 225 v prvním a třetím období. Přítomnost statisticky významné heteroskedasticity je možné vysvětlit např. nezařazením významné proměnné, což způsobí špatnou specifikaci modelu.

Na základě výstupů následujících dvou kapitol, v nichž je zachycen grafický vývoj volatility a grafické srovnání skutečného a odhadnutého podmíněného rozptylu, lze konstatovat, že k největším výkyvům volatility docházelo v druhém, krizovém období. Věrohodněji ve všech případech skutečnou volatilitu vykreslovaly nelineární modely. Výjimkou bylo pouze druhé období u indexu Nikkei 255, kdy reálnému vývoji volatility odpovídal spíše modelovaný podmíněný rozptyl lineárního modelu GARCH(2,1).

Posledním krokem k dosažení hlavního cíle práce byla jednodenní predikce volatility ex-post pomocí hodnot ztrátových funkcí, aby bylo možné určit, který z modelů umožňuje přesnější předpověď. Výsledky jsou blíže rozepsány v popisu 3. dílčího cíle.

V úvodu práce byly také definovány dílčí cíle:

#### 1. DÍLČÍ CÍL - *Posouzení vhodnosti použití navržených modelů*

Pro každý index a pro každé ze tří období byl odhadnut nejlepší možný lineární a nelineární model. Parametry těchto modelů jsou zachyceny v tabulkách č. 4.3 až 4.8. Ani v jednom případě nebyla zjištěna autokorelace. Normální rozdělení bylo zjištěno v druhém období u obou modelů indexu NASDAQ Composite. Heteroskedasticita byla detekována u tří modelů z dvanácti. Prvním z nich je lineární GARCH(1,1) ve třetím období u indexu NASDAQ, zde byl zjištěn statisticky nevýznamný čtverec reziduí při dvoudenním



zpoždění. I v prvním a třetím období u japonského indexu Nikkei 225 bude při modelování volatility přesnější využití nelineárních modelů, lineární model IGARCH(1,1) vykazuje statisticky nevýznamný čtverec reziduí při třídením zpoždění a model GARCH(1,1) při jednodenním. Heteroskedasticita byla tedy zjištěna pouze u lineárních modelů. Vzhledem k hodnotám informačních kritérií bude vhodnější použít pro modelování volatility vždy nelineární model.

## 2. DÍLČÍ CÍL - *Hodnocení stability výsledků ve stanovených obdobích*

Při pohledu na souhrn modelů v tabulce č. 5.1 je zřejmé, že mezi indexy ani mezi obdobími není příliš stabilita. Čím více dílčích období je stanoveno, tím se logicky zvyšuje pravděpodobnost nestability výsledků. U indexu NASDAQ Composite je v každém období použit odlišný lineární i nelineární model, v případě indexu Nikkei 225 lze nalézt shodu alespoň u nelineárního modelu v prvním a druhém období, kdy je použit model CGARCH(1,1).

## 3. DÍLČÍ CÍL - *Hodnocení predikčních schopností jednotlivých modelů*

Schopnost jednodenní predikce ex-post byla zjišťována pomocí ztrátových funkcí popsaných v kapitole 3.5. Výsledky jsou zaznamenány v tabulkách č. 4.17 pro americký index a č. 4.18 pro japonský. Pro index NASDAQ Composite bude mít v každém období schopnost kvalitnější predikce volatility ex-post vždy nelineární model. Pro první období EGARCH(0,1), pro druhé EGARCH(2,2) a pro poslední EGARCH(2,1). Protože se hodnoty jednotlivých ztrátových funkcí vyvíjí stejně, a v posouzení kvality tak dochází ke shodě, není třeba užít testů určujících váhy jednotlivých ztrátových funkcí zmíněných v kapitole 3.5.

I v případě japonského indexu Nikkei 225 dochází k jasným výsledkům během jednotlivých období. Vyjma druhého období, kdy vyhovuje lépe použití lineárního modelu GARCH(2,1), se v prvním a třetím bude lépe predikovat volatilita s pomocí nelineárních modelů CGARCH(1,1) a EGARCH(1,1).

Při porovnání hodnot ztrátových funkcí z hlediska sledovaných období je z obou tabulek zřejmé, že vyšších hodnot dosahují ve druhém, krizovém období. Právě vyšší hodnota volatility zapříčiňuje zhoršené predikční schopnosti daných modelů.

## Seznam použité literatury

### Odborná literatura a články v odborných časopisech

ARLT, J. a M. ARLTOVÁ. *Finanční časové řady*. Praha: Grada Publishing, 2003. 528 s. ISBN 80-247-0330-0.

BOLLERSLEV, T. a J. M. WOOLDRIDGE. Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances. *Econometric Reviews* 11, 1992, s. 143-172.

BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F. A D. B. NELSON. ARCH models. *The Handbook of Econometrics*, 1994, s. 2959-3038.

CAMBELL, J., LO, A. a C. MACKINLAY. *The Econometrics of Financial Markets*. 2nd Edition. Princeton: Princeton University Press, 1997. 632 s. ISBN 0-691-04301-9.

CIPRA, T. *Finanční ekonometrie*. 1.vyd. Praha: Ekopress, 2008. 538 s. ISBN 978-80-6929-43-9.

DVOŘÁK, P. *Veřejné finance, fiskální nerovnováha a finanční krize*. 1. vyd. Praha: C. H. BECK, 2008. 343 s. ISBN 978-80-7400-075-1.

ENGLE, R. F. A V. K. NG. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *Journal of Finance* 48, 1993. s. 1749-1778.

FLECKSTEIN, W. A. a F. SHEEHAN. *Greenspanovy bubliny: Věk ignorace v americké centrální bance (Fed)*. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2009. 168 s. ISBN 978-80-251-2605-9.

GARMAN, M. B., a M. J. Klass. On the estimation of security price volatilities from historical data. *Journal of Business* 53, 1980, s. 67-78.

JÍLEK, J. *Finanční trhy*. 1.vyd. Praha: Grada Publishing, 1997. 528 s. ISBN 80-7169-453-3

KOHOUT, P. *Finance po krizi, důsledky hospodářské recese a co bude dál*. 2. vyd. Praha: Grada, 2010. ISBN 978-80-247-3583-2.

LEE, S. W. a B. E. HANSEN. Asymptotic Theory for the GARCH(1,1) Quasi-Maximum Likelihood Estimator. *Economic Theory* 10, 1991, s. 29-52.

MANDELBROT, B. The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business* 36, 1963. s. 394-419.

NÝVLTOVÁ, R. a M. REŽŇÁKOVÁ. *Mezinárodní kapitálové trhy*. 1. vyd. Praha: GRADA Publishing, a.s., 2007. 224 s. ISBN 978-80-247-1922-1.

PARKINSON, M.: The extreme value method for estimating the variance of the rate of return. *Journal of Business* 53, 1980, s. 61–65.

POON, S. *A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility*. Chichester: John Wiley and Sons Ltd., 2005. ISBN-13 978-0-470-85613-0, ISBN-10 0-470-85613-0.

ROUBINI, N. a S. MIHM. *Krizová ekonomie: Budoucnost finančnictví v kostce*. 1. vyd. Praha: GRADA Publishing, a.s., 2011. 296 s. ISBN 978-80-247-4102-4.

WEISS, A. A. ARMA Models with ARCH Errors. *Journal of Time Series Analysis* 5, 1984, s. 129-143.

### **Elektronické dokumenty a ostatní**

BABULA, K. *Modelování volatility na finančních trzích*. Brno, 2011. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Fakulta ekonomicko-správní, Katedra financí.

BAUWENS, L. a G. STORTI. A Component GARCH Model with Time Varying Weights. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 2008 [cit. 2013-17-06]. Dostupné z: <http://www.wise.xmu.edu.cn/Master/News/NewsPic/2009316163554883.pdf>

DIEBOLD, F. X. a R. S. MARIANO. Comparing Predictive Accuracy. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1995, č. 13, s. 253–263 [cit.2013-21-06]. Dostupné z: <http://www.ssc.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper68/pa.dm.pdf>

ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50, 1982, s. 987-1008 [cit. 2011-06-16]. Dostupné z: <http://finance.martinsewell.com/arch-garch/Engle1982.pdf>

LOPEZ, J. A. Evaluating the Predictive Accuracy of Volatility Models. *Journal of Forecasting* 20, 2001, s. 87–109 [cit. 2013-06-21]. Dostupné z: <http://files.homepagemodules.de/b96742/f34t106p407n2.pdf>

NELSON, D. B. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica* 59, 1991, s. 347-370 [cit. 2013-06-19]. Dostupné z: [http://www.samsi.info/sites/default/files/Nelson\\_1991.pdf](http://www.samsi.info/sites/default/files/Nelson_1991.pdf)

## **Seznam zkratek**

AC – Autocorrelation

ADF – The Augmented Dickey – Fuller test

ARCH – Autoregressive Conditional Heteroscedasticity

ARCH-LM – ARCH test Lagrangeových multiplikátorů

ARMA – Autoregressive moving average

CDO – Collateralized Debt Obligation

CGARCH – Component GARCH

CP – Cenný papír

EGARCH – Exponential GARCH

FED – Federal Reserve System

FTSE – Financial Times Stock Exchange

GARCH – Generalized ARCH

GED – General Error Distribution (obecné rozdělení chyb)

GLME – Generalized Maximum-Likelihood Estimator

IGARCH – Integrated GARCH

JB – Jarque-Bera test

JPY – Japanese Yen

KPSS – Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin test

MAE – Mean Absolute Error

MSE – Mean Square Error

NASDAQ – National Association of Securities Dealers Automated Quotation

NIKKEI – Nihon Kezai Shimbun

PAC – Partial Autocorrelation

PROB. – Probability

PX – Index Burzy cenných papírů Praha

RMSE – Root Mean Square Error

S&P – Standard and Poor's

TSE – Tokyo Stock Exchange (Tokijská burza cenných papírů)

USA – United States of America

USD – United States Dollar

VaR – Value at Risk

## **Prohlášení o využití výsledků diplomové práce**

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3);
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne 8. 7. 2013



.....  
Bc. Martin Soukup

## **Seznam Příloh**

Příloha č. 1: Báze indexu Nikkei 225

## Přílohy

### Příloha č. 1: Báze indexu Nikkei 225

Ajinomoto	Kyowa Hakko Kirin	Hitachi Zo-sen
Asahi Breweries	Shionogi &	Corporation
Japan Tobacco	Takeda Pharmaceutical	IHI
Kikkoman	Company	The Japan Steel Works
Kirin Brewery	Nippon Mining	JTEKT
Meiji Dairies	Holdings	Komatsu
Meiji Seika Kaisha	Nippon Oil	Kubota
Nichirei	Showa Shell Sekiyu	Mitsubishi Heavy
Nippon Meat Packers	K.K.	Industries
Nisshin Seifun Group	Bridgestone	NSK
Sapporo Holdings	The Yokohama Rubber	NTN
Takara Holdings	Asahi Glass	Okuma Holdings
Kuraray	NGK Insulators	Sumitomo Heavy
Mitsubishi Rayon	Nippon Sheet Glass	Industries
Nisshinbo Industries	Nitto Boseki	Advantest
Teijin	Sumitomo Osaka	Alps Electric
Toray Industries	Cement	Canon
Toyobo	Taiheiyo Cement	Casio Computer
Unitika	Tokai Carbon	Clarion
Hokuetsu Paper Mills	Toto	Denso
Mitsubishi Paper Mills	JFE Holdings	Fanuc
Nippon Paper Group	Kobe Steel	Fuji Electric Holdings
Oji Paper	Nippon Steel	Fujitsu
Asahi Kasei	Pacific Metals	GS Yuasa
Denki Kagaku Kogyo	Sumitomo Metal	Hitachi
K.K.	Industries	Kyocera
Fujifilm Holdings	Dowa Holdings	Panasonic
Kao	Fujikura	Panasonic Electric
Mitsubishi Chemical	Furukawa	Works
Holdings	The Furukawa Electric	Meidensha
Mitsui Chemicals	Mitsubishi Materials	Minebea
Nippon Kayaku	Mitsui Mining &	Mitsubishi Electric
Nippon Soda	Smelting	Mitsumi Electric
Nissan Chemical	Nippon Light Metal	NEC
Industries	SUMCO	Oki Electric Industry
Shin-Etsu Chemical	Sumitomo Electric	Pioneer Corporation
Shiseido	Industries	Sanyo Electric
Showa Denko K.K.	Sumitomo Metal	Sharp
Sumitomo Chemical	Mining	Sony
Tosoh	Toho Zinc	Taiyo Yuden
Ube Industries	Toyo Seikan Kaisha	TDK
Astellas Pharma	Chiyoda	Tokyo Electron
Chugai Pharmaceutical	Daikin Industries	Toshiba
Daiichi Sankyo	Ebara	Yokogawa Electric
Dainippon Sumitomo	Hitachi Construction	Kawasaki Heavy
Pharma	Machinery	Industries
Eisai		



Mitsui Engineering &  
Shipbuilding  
Fuji Heavy Industries  
Hino Motors  
Honda Motor  
Isuzu Motors  
Mazda Motor  
Mitsubishi Motors  
Nissan Motor  
Suzuki Motor  
Toyota Motor  
Citizen Holdings  
Konica Minolta  
Holdings  
Nikon  
Olympus  
Ricoh  
Terumo  
Dai Nippon Printing  
Hoshizaki Electric  
Toppan Printing  
Yamaha  
Nippon Suisan Kaisha  
Inpex  
Comsys Holdings  
Daiwa House Industry  
JGC  
Kajima  
Obayashi  
Sekisui House  
Shimizu  
Taisei  
Itochu  
Marubeni  
Mitsubishi  
Mitsui  
Softbank  
Sojitz  
Sumitomo  
Toyota Tsusho  
Aeon  
Fast Retailing

Isetan Mitsukoshi  
Holdings  
J. Front Retailing  
Marui Group  
Seven & I Holdings  
Takashimaya  
Uny  
The Bank of  
Yokohama  
The Chiba Bank  
Chuo Mitsui Trust  
Holdings  
Fukuoka Financial  
Group  
Mitsubishi UFJ  
Financial Group  
Mizuho Financial  
Group  
Mizuho Trust &  
Banking  
Resona Holdings  
Shinsei Bank  
The Shizuoka Bank  
Sumitomo Mitsui  
Financial Group  
The Sumitomo Trust  
and Banking  
Daiwa Securities Group  
Matsui Securities  
Nomura Holdings  
Shinko Securities  
Mitsui Sumitomo  
Insurance Group  
Holdings  
Sompo Japan Insurance  
T&D Holdings  
Tokio Marine Holdings  
Credit Saison  
Heiwa Real Estate  
Mitsubishi Estate  
Mitsui Fudosan  
Sumitomo Realty &  
Development

Tokyu Land  
East Japan Railway  
Company  
Keio  
Keisei Electric Railway  
Odakyu Electric  
Railway  
Tobu Railway  
Tokyu  
West Japan Railway  
Company  
Nippon Express  
Yamato Holdings  
Kawasaki Kisen Kaisha  
Mitsui O.S.K. Lines  
Nippon Yusen K.K.  
All Nippon Airways  
Japan Airlines  
Mitsubishi Logistics  
KDDI  
Nippon Telegraph and  
Telephone  
NTT Data  
NTT DoCoMo  
Sky Perfect JSAT  
Holdings  
Chubu Electric Power  
The Kansai Electric  
Power  
The Tokyo Electric  
Power  
Osaka Gas  
Tokyo Gas  
CSK Holdings  
Dentsu  
Konami  
Secom  
Tokyo Dome  
Toho  
Trend Micro  
Yahoo Japan